Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Jonas Witschel
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

Wintersemester 2016/17

Systemtheorie III
3.Übungsblatt

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Funktion $\widetilde{V}$ gemäß der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 11 für die Differentialgleichung gegeben durch das Vektorfeld

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit den Funktionen

1. $\widetilde{W} = \|x\|_2$ und
2. $\widetilde{W} = \|x\|_2^2$.

Aufgabe 8
Gegeben sei ein Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}$ und $u(t) \in \mathbb{R}$.

(i) Beweisen Sie: Wenn das Gleichgewicht $x^\star = 0$ lokal asymptotisch kontrollierbar ist, so existiert ein Intervall $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon),\ \epsilon > 0$, und eine kompakte Menge $U_0 \subset \mathbb{R}$, sodass für jedes $x \in I_\epsilon$ ein $u_x \in U_0$ existiert mit $f(x, u_x)x \leq 0$.

(ii) Gegeben sei ein (nicht notwendigerweise stetiges oder beschänktes) Feedback $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $g(x) = f(x, F(x))$ lokal Lipschitz stetig ist und $g(0) = 0$ gilt. Beweisen Sie: Das Gleichgewicht $x^\star = 0$ ist genau dann lokal asymptotisch stabil für g, wenn ein Intervall $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon),\ \epsilon > 0$, existiert mit $g(x)x < 0$ für alle $x \in I_\epsilon \setminus \{0\}$.

Aufgabe 9
Beweisen oder widerlegen Sie für jedes der 1d-Systeme

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t)^2, \tag{1}$$
$$\dot{x}(t) = u(t)x(t)^2 + x(t), \tag{2}$$
$$\dot{x}(t) = u(t)|x(t)| + x(t). \tag{3}$$

(i) Das System ist Lipschitz-stetig Feedback stabilisierbar.

(ii) Das System ist asymptotisch kontrollierbar.

(Jeweils im Sinne von Definition 15.)