Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Jonas Witschel
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

Wintersemester 2016/17

Systemtheorie III
5.Übungsblatt

Aufgabe 11 Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u_1(t)x_1(t) - u_2(t)x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t)x_1(t) + u_1(t)x_2(t).\end{aligned}$$

Weisen Sie durch Angabe einer geeigneten Kontroll-Lyapunov-Funktion nach, dass das System asymptotisch stabilierbar ist. Geben Sie weiterhin mithilfe von Sontags universeller Formel eine stabilisierende Zustandsrückführung an.

Aufgabe 12 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Anfangswert $x^0 \in \mathbb{R}^2$.

1. Finden Sie eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, so dass $A + BF$ die Eigenwerte $-2 - i$ und $-2 + i$ besitzt. Interpretieren Sie Ihr Vorgehen für ein lineares zeitinvariantes Kontrollsystem.

2. Wir betrachten nun, was passiert, wenn im Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0$$

für die Zustandsrückführung nur die Werte $x(nT)$ zur Verfügung stehen, wobei $T > 0$ eine Abtastrate ist. Die Zustandsrückführung kann damit nicht als $u(t) = Fx(t)$ gewählt werden, sondern es wird

$$u(t) := Fx\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \cdot T\right),\ t \geq 0 \qquad \text{mit} \qquad \lfloor s \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq s\}$$

verwendet. Es sei also x die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \cdot T\right), \qquad x(0) = x^0. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Ein-Schritt-Übergangsmatrix $\mathbb{A}_T$, das heißt die Matrix, welche $x(T) = \mathbb{A}_T x^0$ für alle $x^0 \in \mathbb{R}^2$ erfüllt. Wie lässt sich $x(nT)$ mit Hilfe von $\mathbb{A}_T$ darstellen?

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Computers ein größtmögliches $T > 0$, so dass für den Spektralradius ρ von $\mathbb{A}_T$ gilt: $\rho(\mathbb{A}_T) < 1$.

4. Beweisen Sie, dass das System (1) genau dann asymptotisch stabil ist, wenn der Spektralradius die Bedingung $r(\mathbb{A}_T) < 1$ erfüllt.