Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

10. Übungsserie (Abgabe am 13. 12. 2017)

Aufgabe 56 (Punkte: 3)
Gegeben sei das AWP

$$y' = y^2 \sin(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1.$$

Bestimme alle Ruhelagen der Differentialgleichung. Zeige, dass das AWP eine eindeutig bestimmte Lösung y auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt. Bestimme

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} y(x).$$

Aufgabe 57 (Punkte: 5)
Bestimme für die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = x - x^2$$

die folgenden Halbtrajektoriren

$$O^-(-2),\ O^-(0),\ O^-(1/2),\ O^-(1),\ O^-(2)$$
$$O^+(-2),\ O^+(0),\ O^+(1/2),\ O^+(1),\ O^+(2).$$

Aufgabe 58 (Punkte: 2+2+2+3)
Betrachte die folgende Famile von Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x + (x_1^2 + x_2^2)x. \tag{1}$$

a) Zeige, dass die Transformation

$$x_1 = r\cos\phi, \quad x_2 = r\sin\phi$$

auf das System

$$\dot{r} = r(\lambda + r^2), \quad \dot{\phi} = 1 \tag{2}$$

führt.

b) Bestimme das Phasenporträt von (2).

c) Bestimme mittels Gleichung (2) das Phasenporträt der Gleichung (1). Bestimme insbesondere die Ruhelagen und die perdiodischen Orbits von (1).

d) Betrachte (1) und (2) mit $\lambda = -1$. Löse das AWP (2), $(r, \phi)^\top(0) = (r_0, 0)^\top$ für $r_0 \approx 1$. Betrachte die Lösungen an der stelle $t = 2\pi$, diese definiert eine Abbildung $r = r(r_0)$, stelle eine Verbindung zu Aufgabenteil $b)$ her.

Aufgabe 59 (Punkte: 3)
Erstelle das Phasenporträt des Systems

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = x^2 y.$$