Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

11. Übungsserie (Abgabe am 20. 12. 2017)

Aufgabe 60 (Punkte: 3)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$t^2\dot{x} + 2tx + e^t = 0.$$

Zeige, dass diese auf dem Definitionsbereich exakt ist, bestimme eine zugehörige Stammfunktion und berechne auf dem eingeschränkten Definitionsbereich die allgemeine Lösung.

Aufgabe 61 (Punkte: 3)
Bestimme für die Differentialgleichung

$$\frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = 0$$

den Definitionsbereich, eine Stammfunktion, den eingeschränkten Definitionsbereich und die allgemeine Lösung.

Aufgabe 62 (Punkte: 1+2+2)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1 - tx^2)\dot{x} + (tx^2 - x^3) = 0. \tag{1}$$

a) Zeige, dass (1) nicht exakt ist.

b) Zeige, dass es einen integrierenden Faktor von (1) gibt, der nur von x abhängt.

c) Man bestimme die allgemeine Lösung von (1) mittels des in *b)* gefundenen integrierenden Faktors.

Aufgabe 63 (Punkte: 3+2)
Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}g(t, x) + h(t, x) = 0$$

mit C^1-Funktionen $g, h : R \to \mathbb{R}$ auf einem Rechteckgebiet R.

a) Gebe jeweils eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass diese Gleichung einen differenzierbaren integrierenden Faktor besitzt, der nur vom Produkt tx bzw. der Summe $t + x$ abhängt.

b) Bestimme mithilfe der Ergebnisse aus a) für die Differentialgleichung

$$\dot{x}t(1-x) + x(1-t) = 0$$

zwei integrierenden Faktoren, und zwar einen, der nur von tx und einen der nur von $t + x$ abhängt.

Aufgabe 64 (Punkte: 3)
Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{\sin t}{t^2} e^{-x} - \frac{2}{t}.$$

Aufgabe 65 (Punkte: 4) Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y - 3x^2 \end{pmatrix}$$

a) Prüfe, ob es sich um ein hamiltonsches System handelt und gebe eine Hamilton-Funktion an.

b) Skizziere mithilfe der angegebenen Hamilton-Funktion das Phasenporträt.