Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

12. Übungsserie (Abgabe am 10. 01. 2018)

Aufgabe 66 (Punkte: 4)
Gegeben sei ein offenes Intervall I sowie eine stetige und bzgl. x lokal Lipschitz-stetige Funktion $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit der folgenden Eigenschaft

> Für jedes offene Intervall $J \subset I$, für jedes Paar $\lambda, \mu \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$ von Lösungen (von $\dot{x} = f(t, x)$) auf J und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $\alpha\lambda + \beta\mu$ eine Lösung auf J.

Dann gibt es eine stetige Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{N \times N}$, so dass $f(t, x) = A(t)x$ für alle $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^N$ gilt, d. h. die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ ist homogen linear.

Aufgabe 67 (Punkte: 3)
Berechne die Jordansche Normalform und die dazugehörigen Transformationsmatrizen folgender Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 68 (Punkte: 4)
Berechne e^{At} für

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d)}\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 69 (Punkte: 3)
Bestimme eine Fundamentalmatrix zum System

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 70 (Punkte: 6)
Löse folgende Differentialgleichungen

a) $\dot{x} = -5x + 3y$
$\dot{y} = -15x + 7y$

b) $\dot{x} = 2x$
$\dot{y} = 2x + y \quad -2z$
$\dot{z} = -x \qquad +2z$

c) $\dot{x} + \dot{y} = x + y + 1$
$\dot{x} - \dot{y} = 7x - y$

Aufgabe 71 (Punkte: 6)
Löse folgende AWPs (wobei für a) und b) $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt)

a) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $b(t) = (\frac{1}{\cos(t)}, 0)^\top$, $x(0) = (1, 1)^\top$,

b) $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b(t) = (t + 1, 2te^t, 2)^\top$, $x(0) = 0$,

c) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 3e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$.