Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Analysis III

13. Übungsserie (Abgabe am 17. 01. 2018)

Aufgabe 72 (Punkte: 2)
Die Matrixfunktion $t \mapsto A(t)$ sei konstant und $\Lambda(\cdot,\cdot)$ die Übergangsmatrix zur homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. Zeige, dass für alle $t, \tau \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Lambda(t,\tau) = \Lambda(t-\tau, 0)$$

Aufgabe 73 (Punkte: 4)
Gegeben seien ein offenes Intervall I und eine stetige Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$. Zeige: Eine auf I stetig differenzierbare Funktion $\Psi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix des Systems

$$\dot{x} = -A(t)^\top x,$$

wenn es zu jeder Fundamentalmatrix $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ das Systems

$$\dot{x} = A(t)x$$

eine konstante reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gibt, so dass für alle $t \in I$ gilt

$$\Psi(t)^\top \Phi(t) = C.$$

Die Übergangsmatrizen der beiden Systeme seien $\Lambda_\top(\cdot,\cdot)$ und $\Lambda(\cdot,\cdot)$. Man stelle $\Lambda_\top(\cdot,\cdot)$ in Abhängigkeit von $\Lambda(\cdot,\cdot)$ dar.

Aufgabe 74 (Punkte: 2+1+1+1)
Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & e^{-2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

a) Berechne ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

b) Berechne die Lösung des AWP mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

d) Berechne die Wronskideterminante der Übergangsmatrix.

Aufgabe 75 (Punkte: 3)
Berechne die Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangswert $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

Aufgabe 76 (Punkte: je 3)
Löse folgende Differentialgleichungen

a) $y'' + 4y' + 5y = 0$,

b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Aufgabe 77 (Punkte: 4)
Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

seien stetig auf dem Intervall I. Dann gelten die folgenden Aussagen

a) Eine nichttriviale Lösung y der Differentialgleichung hat höchstens abzählbar viele (eventuell überhaupt keine) Nullstellen. Sie sind alle einfach und häufen sich nicht in I.

b) Die Nullstellen zweier linear unabhängiger Lösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung trennen sich, d. h. zwischen (echt zwischen) zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von y_1 liegt eine Nullstelle von y_2 und umgekehrt.

Hinweis zu b): Betrachte die Wronski-Determinante in den Nullstellen.