Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

14. Übungsserie (Abgabe am 24. 1. 2018)

Aufgabe 78 (Punkte: 6)
Löse folgende Anfangswertprobleme. Nutze für die Aufgabenteile b und c spezielle Ansätze für die rechte Seite.

a) $\ddot{x} - \dot{x} - x = 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 1$,

b) $x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = e^{2t}$, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$,

c) $y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Aufgabe 79 (Punkte: 1+1+6+3+2)
Bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen. Nutze für die Aufgabenteile c, d und e spezielle Ansätze für die rechte Seite.

a) $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 0$,

b) $\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0$,

c) $y'' + y' - 2y = g_i(x)$ mit $g_1(x) = 4x^2 + 2$, $g_2(x) = 3e^{4x}$, $g_3(x) = 4\cos(2x)$,

d) $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 5y'' + 8y' + 4y = \cos(x) + 10e^x$,

e) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$.

Aufgabe 80 (Punkte: 6)
Löse folgende Differentialgleichungen

a) $\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\dot{x} = Ax + b(x)$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $b(x) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

Aufgabe 81 (Punkte: 2+2+2)
Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $\|\cdot\| := (\cdot,\cdot)^{1/2}$ die induzierte Norm. Zeige

a) Die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

b) Die Polarisationsformel

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

c) $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow x \perp y$

Aufgabe 82 (Punkte: 4)
Es sei

$$\mathcal{H} := \left\{p : [0,1] \to \mathbb{C} : p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0, n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\right\}$$

der Raum der Polynome auf $[0,1]$ und $(\cdot,\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$(p,q) = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}\,dt.$$

a) Zeige, dass $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist.

b) Zeige, dass die Menge $\{t^n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{t^0, t^1, t^2, \ldots\}$ eine Basis, aber keine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ darstellt.

Hinweis für spezielle Ansätze der rechten Seite: Die Störfunktion bezeichnen wir mit g und das charakteristische Polynom mit p. Falls

$$g(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)$$

oder

$$g(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)$$

liefert der Ansatz

$$\begin{aligned} y_p(x) = & x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m) \\ & + x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m) \end{aligned}$$

eine partikuläre Lösung, falls $\alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.