Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

15. Übungsserie (Abgabe am 31. 1. 2018)

Aufgabe 83 (Punkte: 4+2+4)
Gegeben seien der $\mathbb{C}$-Hilbertraum $(L^2[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle h,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\overline{g(t)}\,dt$ für $h,g \in L^2[-\pi,\pi]$ und $f_1, f_2 \in L^2[-\pi,\pi]$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|$.

a) Berechne die (komplexen) Fourierreihen von f_1 und f_2.

b) Untersuchen sie die Fourriereihe von f_1 auf punktweise, als auch auf L^2-Konvergenz.

c) Folgere aus der Fourierreihe von f_1

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

und aus der Fourierreihe von f_2

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aufgabe 84 (Punkte: 2+2)
Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Hilbertraum $(L^2[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle h,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)g(t)\,dt$ für $h,g \in L^2[-\pi,\pi]$ und $f \in L^2[-\pi,\pi]$, $f(x) = \cos^2(x)$.

a) Berechne die (reelle) Fourierreihe von f.

b) Bestimme das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)\,dx$$

mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung.

Aufgabe 85 (Punkte: 2+2)
Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Hilbertraum $(L^2[0,2\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $\langle h,g\rangle = \int_{0}^{2\pi} h(t)g(t)\,dt$ für $h,g \in L^2[0,2\pi]$ und $f \in L^2[0,2\pi]$, $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.

a) Berechne die (reelle) Fourierreihe von f.

b) Folgere

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$