Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Analysis III

2. Übungsserie (Abgabe am 18. 10. 2017)

Aufgabe 6 (Punkte: je 2)
Skizziere den Integrationsbereich und berechne die folgenden Doppelintegrale

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\ dydx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1-r^2)r\ drd\phi,$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{x+y}\sin(x+y)\ dxdy,$

d) $\displaystyle\int_1^2 \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\ dydx.$

Aufgabe 7 (Punkte: 3)
Betrachte $\int_Q f(x,y)\ d(x,y)$, wobei $f(x,y) := 4xy$ und das Integrationsgebiet Q durch die Winkelhalbierende des ersten Quadranten, $y = x^2$ und der Geraden $y = 5$ beschränkt wird. Wende den Satz von Fubini in beide Richtungen an (berechne das Integral zweimal).

Aufgabe 8 (Punkte: 4)
Es sei $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0), & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

erklärt. Berechne

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dxdy \text{ und } \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dydx.$$

Warum ist f nicht integrierbar?
Hinweis: Betrachte dazu die Funktion $x \mapsto \int_{-1}^{1} |f(x,y)|\ dy$. Aus der Gleichheit der iterierten Integrale kann man also nicht auf die Integrierbarkeit der Funktion schließen.

Aufgabe 9 (Punkte: 4)
Betrachte $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0), & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechne $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dxdy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dydx$. Warum gilt der Satz von Fubini nicht?

Aufgabe 10 (Punkte: 3)
Beweise die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für eindimensionale Integrale

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\ dx \cdot \int_a^b g^2(x)\ dx$$

mithilfe des Satzes von Fubini. Dazu seien f und g riemannintegrierbar auf dem Intervall $[a,b]$.
Hinweis: Betrachte

$$I := \int_Q [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2\ d(x,y), \quad Q := [a,b] \times [a,b].$$

Aufgabe 11 (Punkte: 3)
Beweise die folgende Ungleichung für eine positive, stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\ dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\ dx \geq (b-a)^2.$$

Aufgabe 12 (Punkte: je 1)
Berechne den Flächeninhalt bzw. das Volumen folgender Flächen bzw. Körpern

(a) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, y/4 \leq x \leq 1/y\}$,

(b) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y \geq 0, 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq xy\}$,

(c) V wird begrenzt durch die Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y=1$ und der Fläche $z = x^2+y+1$,

(d) V wird begrenzt durch die Ebenen $y=1$, $z=0$, dem parabolischen Zylinder $y=x^2$ und dem Paraboloid $z=x^2+y^2$ und

(e) D ist der Einheitskreis $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.