Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

3. Übungsserie (Abgabe am 25. 10. 2017)

Aufgabe 13 (Punkte: je 1)
Skizziere den Integrationsbereich und vertausche die Integrationsreihenfolge für folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\; dydx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} f(x,y)\; dxdy,$

c) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\; dydx,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\; dxdy,$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\; dydx,$ f) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\; dydx,\ a>0,$

g) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln(x)} f(x,y)\; dydx$ und h) $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\; dydx.$

Aufgabe 14 (Punkte: je 2)
Berechne

a) $\int_G \cos(\frac{x-y}{x+y})\; d(x,y)$, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ durch die Geraden $x+y=1$, $x=0$, $x+y=\frac{1}{2}$ und $y=0$ begrenzt wird.

b) $\int_B e^{\frac{x+y}{x-y}}\; d(x,y)$, über den trapezförmigen Bereich B mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$.

c) $\int_D e^{x^2+y^2}\; d(x,y)$, wobei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \in [1,4], y \geq 0\}$

Hinweis zu a) und b): Nutze die Transformation $u := x-y$ und $v := x+y$.

Aufgabe 15 (Punkte: 4)
Zeige mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri

$$|D_r^n| = S_n r^n, \quad n \in \mathbb{N},\ \text{mit}$$

$$S_n := \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}, & \text{falls } n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!}, & \text{falls } n = 2m+1, \quad m \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Dabei ist D_r^n die n-dimensionale Kugel mit Radius r und $|D_r^n|$ bezeichne das Volumen von D_r^n.
Hinweis: $n!! = n(n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ *für ungerades* n.

Aufgabe 16 (Punkte: 2)
Es sei $T_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1\}$ der n-dimensionale Tetraeder. Zeige

$$|T_n| = \frac{1}{n!}.$$

Aufgabe 17 (Punkte: 2)
Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge mit einer stetigen Dichteverteilung $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$. Dann berechnet sich das Volumen V von G durch $V = \int_G \, d(x_1, x_2, x_3)$ und Masse M durch $M = \int_G \rho(x_1, x_2, x_3) \, d(x_1, x_2, x_3)$. Der Punkt (x_1^s, x_2^s, x_3^s), dessen Koordinaten sich gemäß

$$x_i^s = \frac{\int_G x_i \rho(x_1, x_2, x_3) \, d(x_1, x_2, x_3)}{\int_G \rho(x_1, x_2, x_3) \, d(x_1, x_2, x_3)}$$

berechnen, heißt Schwerpunkt von G. Man bestimme den Schwerpunkt des Kugeloktanden

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x, y, z \geq 0\}$$

vom Radius $R > 0$ und konstanter Dichteverteilung $\rho = k$.

Aufgabe 18 (Punkte: je 2)
Berechne

(a) den Inhalt der Figur, welche durch die Kurve $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ $(a > 0)$ begrenzt wird.

(b) den Inhalt der Figur, welche durch die Kurve $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{x^2 y}{c^3}$ $(a, b, c > 0)$ begrenzt wird.

(c) $\int_B xyz \, d(x, yz)$ mit $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$,

(d) $\int_B \frac{xyz}{x^2+y^2} \, d(x, y, z)$, wobei B durch $z = 0$ von unten und $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$ $(a > 0)$ von oben begrenzt wird,

(e) das Volumen, welches der Kreiszylinder $x^2 + y^2 \leq R^2$ aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$ herausbohrt.

(f) den Teil der Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, der in dem Zylinder, welcher senkrecht auf der x-y-Ebene steht und dessen Grundkreis die Gleichung $x^2 - Rx + y^2 = 0$ hat, liegt.