Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Analysis III

4. Übungsserie (Abgabe am 1. 11. 2017)

Aufgabe 19 (Punkte: 1)
Man betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x),\ f \in C^k(D, \mathbb{R}),\ D \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen.}$$

Man beweise: Ist $\phi(\cdot)$ eine Lösung der gegebenen DGL, so ist $\phi(\cdot)$ sogar $(k+1)$-mal differenzierbar.

Aufgabe 20 (Punkte: je 3)
Skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichungen

$$\text{a) } \dot{x} = t + x \text{ und b) } \dot{x} = t^2 + x^2.$$

Welche Gestalt der Integralkurven entnimmt man dem Richtungsfeld? Fertige mit MAPLE das Richtungsfeld an.

Aufgabe 21 (Punkte: je 3)
Man bestimme die Lösung der folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der *Methode der Variation der Konstanten*:

$$\text{a) } y' = y + x, \quad \text{b) } y' = xe^{-x^2} - 2xy, \quad \text{c) } y' = y + \cos(x).$$

Aufgabe 22 (Punkte: 2)
Begründe warum die Differentialgleichung

$$\dot{x} = d(t) \text{ mit } d(t) := \begin{cases} 0, & t \text{ irrational} \\ 1, & t \text{ rational} \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

keine Lösung haben kann.

Aufgabe 23 (Punkte: 6)
Zeige, dass das N-dimensionale System n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \text{ mit } F : D \subset \mathbb{R}^{1+nN} \to \mathbb{R}^N$$

gleichwertig zum nN-dimensionalen System 1.-Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= y_n \\ \dot{y}_n &= f(t, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^N$ und $(t, y_1, \ldots, y_n) \in D$.
Genügt zudem bei gegebenem $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D$ eine Lösung von $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}_0(t_0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

so erfüllt die zugehörige Lösung von (1) die Anfangsbedingung

$$y_1(t_0) = x_0, \quad y_2(t_0) = x_1, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = x_{n-1}$$

und umgekehrt.
Forme die Systeme 2. Ordnung in Systeme 1. Ordnung um

a) $\ddot{x}_1 = x_2 \sin(t) + \dot{x}_1 \dot{x}_2$, $\ddot{x}_2 = x_1 x_2 + \dot{x}_1 \cos(t)$ und

b) $\ddot{x}_1 = x_2 - 2x_1 + \sin(t)$, $\ddot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + t^2 \dot{x}_1$.

Aufgabe 24 (Punkte: 4)
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{1+2N} \to \mathbb{R}^N$, ein Punkte $(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^{1+2N}$, ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\tau \in I$ und eine Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}^N$. Zeige: Genau dann ist λ eine Lösung des AWPs

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(\tau) = \xi, \quad \dot{x}(\tau) = \eta,$$

wenn für alle $t \in I$ die folgende Integralgleichung erfüllt ist

$$\lambda(t) = \xi + (t - \tau)\eta + \int_\tau^t (t - s) f\left(s, \lambda(s), \dot{\lambda}(s)\right) ds.$$

Aufgabe 25 (Punkte: 2)
Berechne die orthogonale Kurvenschar zu $x^2 - y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Stelle zuerst die DGL der gegebenen Kurvenschar auf und nutze anschließend aus, dass zu jeder Gerade mit Steigung m jede Gerade der Steigung $\frac{-1}{m}$ orthogonal steht.