

Analysis III

5. Übungsserie (Abgabe am 8. 11. 2017)

Aufgabe 26 (Punkte: 3)

Löse das AWP $\dot{x} = 2tx^2$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $x(\tau) = \xi$ und skizziere die Lösungskurven für $(\tau, \xi) = (1, 1)$, $(\tau, \xi) = (2, -\frac{1}{3})$, $(\tau, \xi) = (1, -\frac{1}{2})$ und $(\tau, \xi) = (1, 0)$.

Aufgabe 27 (Punkte: 2)

Löse die folgenden AWP

a) $\dot{x} = 2t(1 + x^2)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $x(\tau) = \xi$, b) $\dot{x} = x^2 \sin(t)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $x(\tau) = \xi$.

Aufgabe 28 (Punkte: 4)

Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Gebe 4 Lösungen des AWP $x(0) = 0$ an, dich sich auf beliebig kleinen Intervallen um $t = 0$ unterscheiden.

b) Gebe auf $I = \mathbb{R}$ drei verschiedene Lösungen des AWP $x(0) = 1$ an.

Aufgabe 29 (Punkte: 4)

Bei einem schnell fahrenden Auto mit aerodynamisch ungünstigem Querschnitt ist der Luftwiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit (mit dem Proportionalitätsfaktor r). Ist m die Masse des Autos, K die konstante Antriebskraft des Motors vermindert um die geschwindigkeitsunabhängige Rollreibung der Räder und fährt das Auto in Richtung der positiven x -Achse, genügt also der Weg-Zeit-Funktion $x = x(t)$. Berechne die Grenzggeschwindigkeit des Autos, also die maximal mögliche Geschwindigkeit.

Hinweis: Nutze das Newtonsche Kraftgesetz.

Aufgabe 30 (Punkte: 3)

Löse folgende Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

a) $xy' = y \ln(\frac{y}{x})$,

b) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$,

c) $xyy' = -(x^2 + y^2)$.

Hinweis: Eine Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$, $x \neq 0$ heißt Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Die Substitution $v(x) := \frac{y(x)}{x}$, $x \neq 0$ führt auf eine Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen.

Aufgabe 31 (Punkte: 6)

Bestimme die allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen

- a) $y' = -x^2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- b) $y' = y \tan(x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- c) $y' - y \cos(x) = 2e^{\sin(x)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- d) $y' + 2y = 25x^2e^{3x}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- e) $2x^2y' + y^2 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- f) $y' = -e^y - 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 32 (Punkte: 6)

Bestimme die Lösungen der folgenden AWP's

- a) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x$, $y(1) = y_0$, $(x, y) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$,
- b) $(x + 1)y' = -(x + 2)y + 2 \sin(x)$, $y(0) = 2$,
- c) $y' = \frac{x-4xy}{1+x^2}$, $y(1) = 1$,
- d) $y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$, $y(2) = 20$,
- e) $y' = 2xy + 1$, $y(0) = 0$,
- f) $y' = e^y \sin(x)$, $y(0) = 0$.