Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

6. Übungsserie (Abgabe am 15. 11. 2017)

Aufgabe 33 (Punkte: 2)
Betrachte die lineare homogene Differentialgleichung $\dot{x} = a(t)x$, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Diskutiere Eigenschaften von $a(\cdot)$ die garantieren, dass für alle Lösungen $\phi(\cdot)$ der gegebenen Differentialgleichung $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$ gilt.

Aufgabe 34 (Punkte: 4)
Löse folgende Bernoullische Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme

a) $y' - y + xy^2 = 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

b) $(1 - x^2)y' - xy - xy^2 = 0, (x, y) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}$

c) $y' + \frac{y}{1+x} + (1 + x)y^4 = 0, y(0) = -1$,

d) $y^3 - x^2 + xy^2y' = 0, y(1) = 1$.

Hinweis: Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ a(\cdot), b(\cdot)\ \textit{stetig}$$

wird Bernoullische Differentialgleichung genannt. Diese geht nach Multiplikation mit $y^{-\alpha}$ in $y^{-\alpha}y_{=}a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$ über. Die Substitution $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$ führt auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Aufgabe 35 (Punkte: 4)
Löse die folgenden Anfangswertprobleme

a) $y' = \frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right), y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$,

b) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x), y(0) = 1$,

c) $y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(1) = 1$,

d) $y' = e^{x-y} - e^x$, $y(0) = 1$.

Aufgabe 36 (Punkte: 2)
Zeige, dass jedes Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(tx), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.
Hinweis: Versuche nicht die Lösung zu berechnen. Es wird nicht gelingen.

Aufgabe 37 (Punkte: 2)
Zeige anhand der Funktionenfamilie

$$f_\alpha(x) := |x|^\alpha, \quad f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \alpha > 0,$$

dass der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit echt zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit liegt, d. h. es Funktionen gibt, die stetig aber nicht Lipschitz-stetig, und solche, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar sind.

Aufgabe 38 (Punkte: 4)
Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2 - t^2.$$

Zeige dass es zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$ genau eine Lösung auf dem Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ gibt. Wie viele Schritte der Picard-Iteration sind nötig, um diese Lösung bis auf einen Fehler $\leq 10^{-2}$ zu approximieren? Gebe eine derart approximierende Funktion explizit an.

Aufgabe 39 (Punkte: 6)
Löse die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme mithilfe des e^λ-Ansatzes

a) $\ddot{x} + 3\dot{x} - 10x = 0$,

b) $\dddot{x} + 4\dot{x} = 0$,

c) $x^{(4)} - x^{(3)} + \ddot{x} - \dot{x} = 0$,

d) $\ddot{x} + 9x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$,

e) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$,

f) $\dddot{x} + 4\dot{x} = 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 1$.