Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

7. Übungsserie (Abgabe am 22. 11. 2017)

Aufgabe 40 (Punkte: 3)
Löse die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = y^2 - (2x+1)y + 1 + x + x^2$$

indem man zunächst $y_0(x) = x$ als partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung bestätigt.
Hinweis:Eine explizite Differentialgleichung 1. *Ordnung*

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + f(x)$$

wird Riccatische Differentialgleichung *genannt. Ist eine partikuläre Lösung* $y_0(\cdot)$ *der Differentialgleichung bekannt, so führt die Substitution*

$$v(x) = \frac{1}{y(x) - y_0(x)}$$

auf eine lineare Differentialgleichung 1. *Ordnung.*

Aufgabe 41 (Punkte: 3)
Löse folgende Differentialgleichungen

a) $y' - y^2 - 2xy = 2$,

b) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$

c) $y' = x^3y^2 + \frac{y}{x} - x^5$

Aufgabe 42 (Punkte: 3)
Löse folgende Differentialgleichungen

a) $y' = \sin(x^2) - \frac{y}{x}$, $x \neq 0$

b) $xy' = y - x - xe^{-y/x}$

c) $y' = y + \frac{\sin(x)}{y}$

Aufgabe 43 (Punkte: 4)
Löse folgende Anfangswertprobleme

a) $y' = -xy + x^2 + 1$, $y(0) = 2$

b) $y' = -2y + \sin(2x)$, $y(0) = 4$

c) $y' = \frac{e^{-y^2}}{y(2x+x^2)}$, $y(2) = 1$

d) $y' = x(y + y^2)$, $y(0) = 1$

Aufgabe 44 (Punkte: 3)
Zeige, dass das AWP

$$\dot{x} = \begin{cases} 2\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}, \; x(0) = 0.$$

eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 45 (Punkte: 4)
Gegeben sei eine kompakte Teilmenge D des $\mathbb{R}^{M+N}$. Ist dann eine Funktion $g(\cdot,\cdot)$ von D in den $\mathbb{R}^K$ stetig und bzgl. der zweiten Variablen Lipschitz-stetig, so genügt $g(\cdot,\cdot)$ einer globalen Lipschitz-Bedingung bzgl. der zweiten Variablen.

Zusatzaufgabe 1: Trennung der Veränderlichen (Punkte: 4)
Es seien f im Interval J und g im Intervall I stetig und $\xi \in J$ und $\eta \in I$. Ist η ein innerer Punkt von I und $g(\eta) \neq 0$, dann gibt es eine (falls ξ ein Randpunkt von J ist einseitige) Umgebung von ξ in der das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y), \quad y(\xi) = \eta$$

genau eine Lösung y besitzt. Sie ergibt sich aus der Gleichung

$$G(y) := \int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x f(t)\,dt =: F(x)$$

durch Auflösung nach y.
Hinweis: Ist ϕ eine im Intervall J differenzierbare Funktion und $\phi'(x) \neq 0$ in J, dann besitzt ϕ eine im Intervall $\phi(J)$ differenzierbare Umkehrfunktion ψ.