Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

8. Übungsserie (Abgabe am 27. 11. 2017)

Aufgabe 46 (Punkte: 4)
Zeige: Ist D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{M+N}$ und sind $g(\cdot,\cdot)$ und $h(\cdot,\cdot)$ auf D stetige und bzgl. der zweiten Komponente Lipschitz-stetige reellwertige Funktionen, so ist auch das Produkt $(g\cdot h)(\cdot,\cdot)$ und (sofern $h(\cdot,\cdot)$ keine Nullstellen in D hat) der Quotient $\frac{g}{h}(\cdot,\cdot)$ stetig und bzgl. der zweiten Komponente Lipschitz-stetig.

Aufgabe 47 (Punkte: 3)
Bestimme für jedes der Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = t^2x^2, \quad x(t_=) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$$

die maximale Lösung und das zugehörige Existenzintervall.

Aufgabe 48 (Punkte: 2)
Begründe warum für jeden Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ das AWP

$$\dot{x} = \frac{t^3x^3}{1+x^2} + e^t \cos x, \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 49 (Punkte: 2)
Zeige, dass jedes zur Pendelgleichung gehörige AWP

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x} - \frac{g}{l}\sin x \quad x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_1,\ (t_0, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^3$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 50 (Punkte: 3)
Gegeben sei eine stetige und bzgl. x Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{1+N} \to \mathbb{R}^N$ mit $f(t,x) = 0$ für alle (t,x) aus der Menge

$$M_\rho := \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+N} : \|x\| > \rho > 0\right\}.$$

Zeige, dass dann die maximale Lösung zu jedem AWP

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 51 (Punkte: 4)
Zeige anhand von Beispielen, dass für die maximale Lösung $\lambda : (s_-, s_+) \to \mathbb{R}^N$ eines den Standardvoraussetzungen genügenden Anfangswertproblems auch Folgendes gelten kann:

a) Die im Satz über das Randverhalten der Lösungen auftretende Unbeschränktheit liegt nicht in Form der uneigentlichen Konvergenz $\lim_{t \nearrow s_+} \|\lambda(t)\| = \infty$ vor.

b) Trotz $s_+ = \infty$ gilt die Beziehung $\lim_{t \nearrow s_+} \operatorname{dist}((t, \lambda(t)), \partial D) = 0$.