Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

9. Übungsserie (Abgabe am 6. 12. 2017)

Aufgabe 52 (Punkte: 9)
Klassifiziere und löse die folgenden AWPs

a) $y + \frac{e^t}{y^2} + 3t\dot{y} = 0$, $y(2) = 0$,

b) $\dot{y} = -y^2 + \frac{2}{t^2}$, $y(1) = 1$,

c) $y' = \frac{2yx}{x^2 - y^2}$, $y(0) = 1$,

d) $\dot{y} + \sin(t)y = \cos(t)$, $y(0) = 1$,

e) $y' = 1 + \frac{2}{x-y+4}$, $y(0) = 1$,

f) $\dot{y} - \frac{2}{t}y + \frac{y^2}{t^2} = 4t^2$, $y(1) = 1$.

Aufgabe 53 (Punkte: 4)
Betrachte für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto t^3 x^2$$

das AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

und bestimme alle (t_0, x_0) so, dass die maximale Lösung

a) ein beschränktes maximales Existenzintervall hat (gebe dieses an),

b) für $x_0 \neq 0$ ein unbeschränktes maximales Existenzintervall hat.

Aufgabe 54 (Punkte: 2+1+1)
Gegeben sei die skalare autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer auf einem offenen Intervall D Lipschitz-stetigen rechten Seite.

a) Zeige, dass alle Lösungen dieser Differentialgleichung monoton sind.

b) Gebe ein Beispiel für eine solche Gleichung an, die sowohl streng monoton wachsende als auch streng monoton fallende Lösungen besitzt.

c) Zeige anhand eines Beispiels, dass im Fall höher-dimensionaler autonomer Systeme möglich ist, dass sämtliche Komponenten einer Lösung nicht-monoton sind.

Aufgabe 55 (Punkte: 5)
Gegeben sei eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^N$ und der für alle $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times D$ erklärte Fluss $\phi(t; \xi)$ eines autonomen Systems. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\varphi_t : D \to D, \quad \varphi_t(\xi) := \phi(t; \xi)$$

und fassen all diese Abbildungen zu einer Menge zusammen:

$$\Psi := \{\varphi_t : D \to D : t \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige, dass Ψ bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine abelsche Gruppe bildet.