Institut für Mathematik
PD Dr. H. Winkler
F. Leben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

1. Übungsserie (ohne Abgabe)

Aufgabe 1
Beweise die folgenden Aussagen über Riemann-Integrale:

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und für alle stetigen Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gelte $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = 0$. Zeige, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

(b) Ist f Riemann-integrierbar dann auch $|f|$. Zeige, dass die Umkehrung falsch ist.

Aufgabe 2
Berechne durch geeignete Wahl von Zerlegungsfolgen $(Z_n)_n$ der zu betrachtenden Intervalle die folgenden Riemann-Integrale:

$$\int_a^b e^x\ dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx$$

Hinweis: Für das erste Integral wähle man Z_n als äquidistante Unterteilung von $[a,b]$ in Intervalle der Länge $(b-a)/n$. Für das zweite Integral wähle man für Z_n die Randpunkte $x_i = \sqrt[n]{2}^i$ für $i = 0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 3
Nutze die Grenzvertauschungssätze um den Wert der folgenden Reihen zu berechnen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, *Hinweis: Benutze die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, *Hinweis: Zeige die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Nutze (ohne Beweis), dass die Reihe $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ für alle $\delta > 0$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{x-\pi}{2}$ konvergiert.*

Aufgabe 4
Entwickle folgende Funktionen in eine Potenzreihe und gib deren Konvergenzradius an:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt, \qquad \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Aufgabe 5
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$. Berechne $\int_D f(x,y)\ d(x,y)$, wobei

(a) $D = [0,1] \times [0,2]$, $f(x,y) = xy^2$,

(b) $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$, $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$,

(c) $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$,

(d) $D = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = 2xe^{x^2+y}$ und

(e) $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$, $f(x,y) = \sin(x+y)$.