Institut für Mathematik
Achim Ilchmann
Hannes Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Wintersemester 2019/20

# Systemtheorie 1

## Serie 2: Laplacetransformation

**Aufgabe 5**
Wir betrachten $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^m) := \{u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) : e^{-\alpha \cdot} u(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)\}$, sowie $\mathbb{C}_{>\alpha} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > \alpha\}$ und definieren die Laplace-Transformation durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^m) &\to \{f : \mathbb{C}_{>\alpha} \to \mathbb{C}^m\} \\ u(\cdot) &\mapsto \left(s \mapsto \mathcal{L}(u)(s) := \textstyle\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-ts}\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie für $\lambda, \mu, \alpha, c \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^m)$ die folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{L}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{L}(u) + \mu \mathcal{L}(v)$,

(ii) $\forall\, s$ mit $\text{Re}\, s > \alpha - c\ :\ \mathcal{L}\left(e^{-c \cdot} u(\cdot)\right)(s) = \mathcal{L}\left(u(\cdot)\right)(s + c)$

(iii) Ist $u$ $k$-mal differenzierbar in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $u^{(j)} \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^m)$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, dann gilt

$$\forall\, s \text{ mit } \text{Re}\, s > \alpha\ :\ \mathcal{L}(u^{(k)})(s) = s^k \mathcal{L}\left(u\right)(s) - s^{k-1}u(0) - \ldots - u^{(k-1)}(0).$$

Bestimmen Sie mit diesen Eigenschaften die Laplace-Transformierte der Funktionen $u(\cdot) = 1$, $u(\cdot) = e^{-\lambda \cdot}$, $u(\cdot) = \sin(b\,\cdot)$. Geben sie für jede Funktion ein kleinstmögliches $\alpha$ an, sodass $\mathcal{L}(u)$ auf $\mathbb{C}_{>\alpha}$ definiert ist.

**Aufgabe 6**
Für zwei Funktionen $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ erklären wir ihre Faltung $f * g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Man beweise den Faltungssatz: Für $f, g \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R})$ ist $f * g \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

*Hinweis:* Um $f * g \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R})$ zu zeigen verwende man die schon aus Analysis bekannte Faltungsungleichung für $L_1$-Funktionen:
Zu $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ betrachtet man die Faltung $(f *_{L_1} g)(t) := \int_{-\infty}^\infty f(t - \tau) g(\tau) d\tau$, dann gilt

$$\|f *_{L_1} g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}.$$

**Aufgabe 7**
Ist das System $(A, b)$ mit

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ b := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

steuerbar? Falls ja, so geben Sie eine Transformationsmatrix $V \in GL_4(\mathbb{R})$ an, sodass

$$(V^{-1}AV, V^{-1}B) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

---

Die Aufgaben werden in der Übung **am 18.11.2019, 15 Uhr, C 113** besprochen.

---