Institut für Mathematik
Achim Ilchmann
Hannes Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Wintersemester 2019/20

Systemtheorie 1

Serie 3: Laplace-Trafo, Hautus-Kriterium, Stabilität

Aufgabe 8
Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Abbildung sowie den größtmöglichen Definitionsbereich:

$$t \mapsto \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda t}, \quad t \geq 0,\ j \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 9
Bestimmen Sie für das System

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad x(0) = x^0$$

ein kleinstmögliches $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass die Laplacetransformation $\mathcal{L}(x)$ und $\mathcal{L}(u)$ auf $\mathbb{C}_{>\alpha}$ definiert ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie für das SISO-System

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + bu(t),\ x(0) = 0_{\mathbb{R}^n}, && A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n, \\ &y = cx, && c \in \mathbb{R}^{1\times n} \end{aligned}$$

die Aussage: Ist der Ausgang y des Systems für alle möglichen Eingänge $u \in L^1_{loc}$ beschränkt, so gilt für die Transferfunktion $G(s) = c(sI - A)^{-1}b \equiv 0$.

Aufgabe 11
Für

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

zeigen Sie: (A, b) ist genau dann steuerbar, wenn $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$ ist und alle $b_i \neq 0$ sind.

Aufgabe 12
Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ steuerbar und $\operatorname{rk} B = q \leq m$. Zeigen Sie: Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts von A beträgt höchstens q.

Aufgabe 13
An einem runden Tisch sitzen n Personen $P_1, \ldots, P_n$, sodass P_i mit P_{i+1} benachbart ist für $i = 1, \ldots, n$ und P_{n+1} wird mit P_1 identifiziert. Jede Person P_i hat einen Geldbetrag x_i. Des Weiteren seien $\alpha, \beta \geq 0$ gegeben mit $\alpha + \beta \leq 1$. Nun gibt simultan jede Person P_k den Betrag αx_k an ihren linken Nachbar und βx_k an ihren rechten Nachbar. Diese Aktion wird nun $n-1$ mal wiederholt. Jede Person kennt ihren Geldbetrag in jeder Runde, sowie die Konstanten α und β. Gelingt es der Person die Anfangsgeldverteilung zu Beginn der ersten Runde, zu rekonstruieren?

Hinweis: Man überlege sich das Kalmann bzw. Hautus-Kriterium auch für zeitdiskrete Systeme gilt.

Aufgabe 14
Für

$$\dot{x} \; = \; Ax + Bu(t), \qquad x(t_0) = x^0$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{<0}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ zeigen Sie:

$$u \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m) \quad \Rightarrow \quad x \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung.

Aufgabe 15
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{<0}$. Zeigen Sie die Existenz eines $\delta > 0$, so dass für alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\forall t \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \; : \; \|g(t,x)\| \leq \; \delta \, \|x\|$$

jede Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ von $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t, x(t))$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Hinweis: Gronwall-Lemma.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 02.12 und 16.12.19, 15 Uhr, C113 besprochen.
