Institut für Mathematik
Achim Ilchmann
Hannes Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
**ILMENAU**

Wintersemester 2019/20

# Systemtheorie 1

## Serie 4: Lyapunov-Stabilität, Stabilisierbarkeit

**Aufgabe 16**
Sei

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) Ist das System $(A, b, c)$ steuerbar?

(ii) Ist das System $(A, b, c)$ beobachtbar?

(iii) Berechnen Sie die Transferfunktion $G(s) = c(sI - A)^{-1}b$ des Systems.

(iv) Ist das System BIBO-stabil? Ist es asymptotisch stabil?

(v) Bestimmen Sie den Ausgang $y$ des Systems bei einem Anfangszustand von $x(0) = 0$ für den gegebenen Eingang $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u(t) := e^t$. Wie verhält sich der Ausgang für $t \to \infty$?

(vi) Wie verhält sich der Zustand $x$ des Systems beim gegebenen Eingang für $t \to \infty$?

*Hinweis: Nutzen Sie für (v) die Eigenschaften der Laplace-Transformation aus den Aufgaben 5 und 6.*

**Aufgabe 17**
Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ asymptotisch stabil? Falls ja, so bestimmen Sie eine Lyapunovfunktion für das System.

*Hinweis:* Benutzen Sie für die Lyapunovfunktion $V$ den Ansatz $V(x) = x^\top Px$ aus Aufgabe 20, wobei $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische, positiv definite Lösung der Lyapunovgleichung

$$A^\top P + PA = -I_2$$

darstellt. Diese Matrixgleichung kann durch den Ansatz $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ und elementweises Auswerten gelöst werden.

**Aufgabe 18**
Für das System

$$\dot{x} \;=\; A\,x + B\,u(t) \tag{1}$$

mit $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ existieren Matrizen

$$M \geq 0, \quad N^\top = -N, \quad K = K^\top > 0 \;:\; A^\top K + KA < 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Rückführung

$$u(t) = [N - M]B^\top K\,x(t)$$

angewandt auf (1) zu einem asymptotisch stabilen System führt.

**Aufgabe 19**
Das System

$$\dot{x} \;=\; A\,x + B\,u(t) \tag{2}$$

mit $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ sei steuerbar.

(i) Zeigen Sie, dass für $\alpha > \|A\|_2$ eine Lösung $P = P^\top > 0$ von

$$(\alpha I + A)P + P(\alpha I + A^\top) \;=\; 2BB^\top$$

existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$u(t) = -B^\top P^{-1} x(t)$$

das System (2) stabilisiert.

---

Die Aufgaben werden in der Übung am 13.01.20 um 15 Uhr, C113 besprochen.

---