Institut für Mathematik
Achim Ilchmann
Hannes Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Wintersemester 2019/20

Systemtheorie 1

Serie 5: Stabilisierung und Polplatzierung

Aufgabe 20
Betrachten Sie das lineare System

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ z(t)\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ z(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t) &= [1,0,\dots,0]\begin{pmatrix}\xi(t)\\ z(t)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$

mit $\gamma > 0$, $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_2, A_3^\top \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und $\sigma(A_4) \subset \mathbb{C}_-$.

Zeigen Sie die Existenz eines $k^* > 0$, so dass für jede Rückführung

$$u(t) := -k\,y(t)\,, \qquad k \geq k^*$$

angewandt auf (1) gilt, dass der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Betrachte die Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $(z,\xi) \mapsto z^T P z + \xi^2$, wobei $P > 0$ die Lösung der Lyapunov-Gleichung $A_4^T P + P A_4 = -I_{n-1}$.

Aufgabe 21
Das System $\dot{x} = Ax + bu$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ sei steuerbar und $p(s) = s^n + \ldots + p_1 s + p_0$ ein monisches Polynom. Zeige, dass die Zustandsrückführung

$$-fx(t) := -[0,\dots,0,1][b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1}p(A)x(t)$$

impliziert, dass $\det(sI_n - (A - bf)) = p(s)$.

Aufgabe 22
Untersuche das System

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

jeweils gegeben durch

(a) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, (b) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$,

(c) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$,

auf Stabilität, Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit und bestimme gegebenenfalls eine stabilisierende Zustandsrückführung $u = Fx$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 05.02.20 um 17 Uhr, C112 besprochen.
