Institut für Mathematik
Prof. K. Worthmann
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Angewandte Analysis

2. Übungsserie zur Besprechung am 08.11.2019

Abgabe der mit * markierten Aufgabe bis zum 20.11.19 in meinem Büro C230.

Aufgabe 4*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(iv) Sei $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sodass für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(x)dx.$$

Dann ist f fast überall differenzierbar und $f'(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(v) Die Funktion $x(\cdot, x_0)$ aus (i) erfüllt die Differenzialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Nutze ohne Beweis, dass eine absolut stetige Funktion lokal von beschränkter Variation ist, und damit fast überall differenzierbar.

Aufgabe 5
In Ilmenau ist an Halloween eine Zombieepidemie ausgebrochen. Mit Hilfe eines modifizierten Lotka-Volterra-Modells kann man unter Vernachlässigung der Geburten- und Sterberate das folgende Modell aufstellen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S(t) &= -\beta S(t)Z(t) \\
\frac{d}{dt}Z(t) &= \beta S(t)Z(t) + \zeta R(t) - \alpha S(t)Z(t), \\
\frac{d}{dt}R(t) &= \alpha S(t)Z(t) - \zeta R(t).
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen S, Z und R jeweils die Anzahl der Menschen, der Zombies und der "Entfernten". Die Parameter α, β, ζ beschreiben "Tötungsrate von Zombies durch Menschen", "Umwandlung von Mensch in Zombie", und die "Auferstehungsrate von Mensch als Zombie".

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichte des DGL-Systems.

(b) Untersuche die Konvergenz der Trajektorien gegen die Gleichgewichte. Welches Schicksal erwartet die Ilmenauer Bevölkerung?

Aufgabe 6*

Bestimmen Sie die *Erreichbarkeitsmenge* $K(t; x^0)$, den *Erreichbarkeitskegel* $\mathcal{RC}(x^0)$ und die Menge $\mathcal{C}$ der *zulässigen Anfangszustände* für das eindimensionale Problem

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad x(0) = x^0 > 0, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U},$$

mit $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für alle $t \geq 0$. Unterscheiden Sie die Fälle $a > 0$ und $a < 0$, sowie $x^0 \geq |1/a|$ und $x^0 < |1/a|$.

Aufgabe 7

Beweisen Sie die Trennungssätze, welche im Beweis von Satz 2.3 aus der Vorlesung verwendet werden:

(a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge und sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der nicht im Abschluß $\overline{C}$ von C liegt. Dann gibt es eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \gamma\}$, die y enthält und $a^T y < \inf_{x \in C} a^T x$ erfüllt.

(b) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein Randpunkt von C. Dann gibt es eine Hyperebene, die y enthält und die C in einem ihrer abgeschlossenen Halbräume enthält.

Hinweise: Die abgeschlossenen Halbräume einer Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \gamma\}$ *sind gegeben durch*

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \gamma\}, \quad H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \gamma\}.$$

Desweiteren soll der ***Projektionssatz*** *verwendet werden: Sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Dann gibt es zu jedem Vektor* $y \in \mathbb{R}^n$ *einen eindeutigen Vektor* $x_0 \in M$ *mit* $\|y - x_0\|_2 \leq \|y - x\|_2$ *für alle* $x \in M$. *Zudem gilt* $(y - x_0)^T (x - x_0) \leq 0$ *für alle* $x \in M$.

Aufgabe 8

Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -(1-t)x_2(t) \\ (1-t)x_1(t) \end{pmatrix}, & \text{für } t \in [0,1], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ (t-1)(u(t)-2) \end{pmatrix}, & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie mittels einer Transformation auf Polarkoordinaten, dass die Lösungen des Systems für $t \in [0,1]$ auf einer Kreisbahn verlaufen.

(b) Man charakterisiere die Menge $\mathcal{C}$ der steuerbaren Anfangszustände für $\mathcal{T}(t) = \{0\}$.

(c) Zeigen Sie, dass der Schnitt der Lösungstrajektorie mit der Menge $\mathcal{C}$ höchstens den Anfangszustand enthält.