

Angewandte Analysis

3. Übungsserie zur Besprechung am 22.11.2019

Abgabe der mit * markierten Aufgabe bis zum 04.12.19 in meinem Büro C230.

Aufgabe 9

Für welche Werte von $\beta \in \mathbb{R}$ erfüllt das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} u(t)$$

mit $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für alle $t \geq 0$ die Bedingung $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 10

Für einen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, beweise man

$$AV \subseteq V \iff \forall t \geq 0: e^{At}V \subseteq V.$$

Aufgabe 11*

Das folgende lineare System beschreibt die Bewegung eines Satelliten mit der Kreisfrequenz $\omega > 0$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Hierbei beschreiben die Eingänge u_1 und u_2 den Einfluss der Triebwerke auf die Satellitendynamik.

- Gilt $0 \in \text{int } \mathcal{C}$, oder sogar $\mathcal{C} = \mathbb{R}^4$?
- Gelten die Aussagen von (a) immer noch, wenn eines der Triebwerke ausfällt, das heißt es gilt $u_1 \equiv 0$ oder $u_2 \equiv 0$?

Aufgabe 12

Beweise das folgende Lemma aus der Vorlesung: Sei $K(t; 0)$ die Menge der zur Zeit t von Null erreichbaren Werte des zeitumgekehrten Systems

$$\dot{x} = -Ax - Bu$$

und es gebe eine Nullumgebung $\mathcal{B}_\delta(0) \subseteq \bigcup_{t \geq 0} K(t; 0)$. Dann existiert eine Nullumgebung $\mathcal{B}_\alpha(0)$, die sich zur Zeit 1 erreichen lässt, das heißt $\mathcal{B}_\alpha(0) \subseteq K(1; 0)$.