

Angewandte Analysis

5. Übungsserie zur Besprechung am 20.12.2019

Aufgabe 17

Betrachte das zweidimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1, & x^0 &= (-1, 0)^\top. \\ \dot{x}_2 &= u_2,\end{aligned}$$

- (a) Zeige, dass $K(t; x^0)$ ein Quadrat ist und skizziere $\mathcal{RC}(x^0)$.
- (b) Für eine messbare Funktion $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 \Phi(s) ds = 0$ betrachten wir die Steuerung $u(t) = (1, \Phi(t))^\top$. Beweise, dass u eine zeitoptimale Steuerung ist, falls $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 18

- (a) Seien X und Y Banachräume $T : X \rightarrow Y$ stetig. Zeige dass T schwach konvergente Folgen auf schwach konvergente Folgen abbildet, d.h. falls $x_n \rightharpoonup x$ in X dann folgt $Tx_n \rightharpoonup Tx$.
- (b) Gib eine Folge im Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ an, welche schwach kompakt aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 19

Seien $w, u : [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^m$ beschränkt und messbar. Zeige, dass aus $\int_0^t e^{-As} B(w(s) - u(s)) ds = 0$ für alle $0 \leq t \leq t^*$, folgt $B(w(t) - u(t)) = 0$ für fast alle $t \in [0, t^*]$.