Institut für Mathematik
Prof. K. Worthmann
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Angewandte Analysis

6. Übungsserie zur Besprechung am 14.01.2020

Aufgabe 20
Es sei $\Theta(t)$ die Auslenkung eines Pendels ohne Reibung zum Zeitpunkt t. Wird das Pendel mit einer Kraft u angetrieben, dann kann Θ approximativ durch Lösungen der linearen DGL

$$\ddot{\Theta}(t) = -\Theta(t) + u(t).$$

beschrieben werden. Wir formulieren dies als System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Theta(t)\\ \dot{\Theta}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta(t)\\ \dot{\Theta}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t), \quad \mathcal{T}(t) = \left\{(0,0)^\top\right\}. \tag{1}$$

(a) Zeige mit Hilfe des Maximumprinzips, dass jede zeitoptimale Steuerung $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, die den Anfangszustand $(\Theta(0), \dot{\Theta}(0))^\top$ in die Ruhelage $(\Theta(T), \dot{\Theta}(T))^\top = (0,0)^\top$ steuert, periodisch und vom Bang-Bang-Typ ist.

(b) Zeige, dass das System normal ist und folgere die Eindeutigkeit der zeitoptimalen Steuerung.

(c) Betrachte nun (1) mit den konstanten Steuerungen $u(\cdot) \equiv 1$ und $u(\cdot) \equiv -1$. Weise nach, dass die Trajektorien $x(\cdot; x^0, u(\cdot))$ Kreise mit Mittelpunkt $(1,0)^\top$ bzw. $(-1,0)^\top$ sind.

(d) Bestimme die zeitoptimale Steuerung für den Anfangswert $x^0 = (4,0)^\top$.

Aufgabe 21
Gegeben sei $\dot{x} = Ax + Bu$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sodass B keine Nullspalten enthält und sei $y \in K(t^*, x^0)$. Zeige, dass die Steuerung von x^0 nach y genau dann eindeutig ist, wenn für alle $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ mit $x(t^*; x^0, u_1) = x(t^*; x^0, u_2) = y$ folgt, dass $x(t; x^0, u_1) = x(t; x^0, u_2)$ für alle $t \in [0, t^*]$.

Aufgabe 22
Das Paar $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ sei normal und A besitze n verschiedene Eigenwerte. Zeige, dass jede Komponente u_i, $i = 1, \ldots, m$ einer zeitoptimalen Steuerung u höchstens $n - 1$ Vorzeichenwechsel besitzt.