Institut für Mathematik
Prof. K. Worthmann
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Angewandte Analysis

7. Übungsserie zur Besprechung am 04.02.2020

Aufgabe 23 (Problem mit fester Endzeit)
Betrachten Sie das skalare Problem

$$\dot{p}(t) = -u(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad \text{mit} \qquad p(0) = p(1) = 0.$$

Als Kostenfunktion $J : \mathcal{U}_{\mathrm{PC}} \to \mathbb{R}$ wählen wir

$$J(u) := \int_0^1 u(t) + 1 \,\mathrm{d}t$$

mit $u(t) \in \Omega = [-1, 1]$.

(a) Um das PMP anzuwenden führen wir eine zusätzliche Zustandsvariable q ein und betrachten das Hilfssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{T}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Mengen der zulässigen Steuerungen des ursprünglichen und des erweiterten Systems übereinstimmen. Bestimmen Sie eine Optimalsteuerung.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Konstruktion aus (a) eine Optimalsteuerung für die Dynamik $\ddot{p}(t) = -u(t)$ mit den zusätzlichen Anfangs- und Zielwerten $\dot{p}(0) = \dot{p}(1) = 0$.

(c) Bestimmen Sie eine Optimalsteuerung für das System aus (a) mit den Kosten $J(u) := \int_0^1 u(t)^2 \,\mathrm{d}t$ und dem Anfangswert $p(0) = 1$.

Aufgabe 24
Betrachte das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi u) \\ \cos(2\pi u) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 1).$$

mit der Endbedingung $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ und der Kostenfunktion $J(u) := \int_0^1 x_1(\tau)^2 + x_2(\tau)^2 d\tau$. Zeige, dass keine Optimalsteuerung existiert. Betrachte hierfür die Folge $u_k(t) := kt - [kt]$, wobei $[kt]$ die größte natürliche Zahl kleiner oder gleich kt bezeichnet. Zeige, dass $J(u_k) \to 0$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 25

Für ein gegebenes autonomes Anfangswertproblem $\dot{x} = g(x)$, $x(0) = x_0$ mit einer festen Lösung $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ betrachten wir das entlang der Lösung linearisierte System

$$\dot{b}(t) = g_x(x(t))b(t), \quad b(0) = b_0, \tag{1}$$

sowie das adjungierte System

$$\dot{w}(t) = -g_x(x(t))^T w(t), \quad w(0) = w_0. \tag{2}$$

Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Ist b_0 tangential zur Kurve $x(\cdot)$ in $x(0)$, dann ist $b(t)$ tangential zur Kurve $x(\cdot)$ in $x(t)$ für alle $t \in [0, T]$.

(b) Lösungen b bzw. w von (1) bzw. (2), erfüllen $w^T(t)b(t) = const.$