Institut für Mathematik
Prof. K. Worthmann
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Angewandte Analysis

1. Übungsserie zur Besprechung am 25.10.2019

Aufgabe 1
Wir betrachten das Problem der *weichen Landung* auf dem Mars. Eine Raumkapsel der Masse m ist ausgestattet mit einem Antrieb der eine nach oben oder unten wirkende Kraft $f(t)$ auf die Landestufe ausüben kann. Die Höhe der Kapsel über der Marsoberfläche zum Zeitpunkt t sei $h(t)$ und die Gravitationskonstante auf dem Mars sei g. Die Flughöhe genügt dann der Differenzialgleichung

$$m\ddot{h}(t) = -mg + f(t), \quad t \geq 0; \quad h(0) = \xi_1, \ \dot{h}(0) = \xi_2, \qquad (*)$$

wobei ξ_1 die Anfangshöhe und ξ_2 die Anfangsgeschwindigkeit sind. Das Problem der weichen Landung besteht darin, den Schub so zu steuern, dass zu einem Endzeitpunkt $t_1 = 0$ sowohl $h(t_1) = 0$ (Bodenkontakt) als auch $\dot{h}(t_1) = 0$ (keine Geschwindigkeit) gilt.

(a) Formuliere $(*)$ zunächst als Anfangswertproblem erster Ordnung und anschließend als ein lineares System $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ wobei die Steuerung durch $u(t) = f(t)/m - g$ gegeben ist. Bestimme die Zielmenge $\mathcal{T}(t)$ für das Problem der weichen Landung!

(b) Zeige, dass es für jedes $t_1 > 0$ eine affin-lineare Steuerung der Form $u(t) = \alpha + \beta t$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert, die das Problem der weichen Landung löst, das heißt $x(t_1) \in \mathcal{T}(t_1)$.

(c) Wir treffen nun die realistischere Annahme, dass der Schub nur aufwärtsgerichtet und nach oben beschränkt ist, d.h. $0 \leq f(t) \leq F$. Um die Schwerkraft überwinden zu können, müssen wir $F > mg$ annehmen. Sei $h(0) > 0$ und $\dot{h}(0) = 0$. Zeige, dass $t_2 > 0$ und $t_1 \in (0, t_2)$ existieren, sodass $x(t_2) \in \mathcal{T}(t_2)$ gilt, wenn die stückweise konstante Steuerung

$$u(t) = \begin{cases} -g, & \text{für } 0 \leq t < t_1, \\ \frac{F}{m} - g, & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

verwendet wird.

Hinweis: *Verwende für (b) und (c) die Variation der Konstanten-Formel.*

Aufgabe 2
Modelliere eine Fischfarm: Nimm hierzu an, dass die Fischpopulation $x(\cdot)$ ohne äußere Einwirkungen durch die logistische DGL

$$\dot{x}(t) = r\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

mit Konstanten r und K beschrieben wird. Hierbei beschreibt K das maximale Fassungsvermögen der Farm und r das Verhältnis von Geburts- zur Sterberate. Die Population wird durch den Fischfang, der proportional zur Population $x(\cdot)$ angenommen wird, gesteuert:

$$u(t) = -Ex(t), \quad 0 < E < r.$$

(a) Beschreiben Sie die Dynamik der Population x der Farm durch eine skalare Differentialgleichung und bestimmen Sie anschließend die Lösung.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichte der DGL, das heißt die Lösungen $x(\cdot; x^*)$ mit $x(t; x^*) = x^*$ für alle $t \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Anfangswert $x^0 > 0$ gilt, dass $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; x^0) = x^*$ für das Gleichgewicht $x^* > 0$ aus (b).

(d) Für welchen Wert von E wird die Fangzahl Ex^* maximal?

Aufgabe 3*

(a) Ist die Funktion

$$u : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad u(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{für } t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{für } t = 1 \end{cases}$$

stückweise konstant? Ist u eine Regelfunktion?

(b) Geben Sie eine Bang-Bang Funktion an, die nicht stückweise konstant ist!

(c) Geben Sie eine Bang-Bang Funktion an, die keine Regelfunktion ist!

Hinweis: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls in jedem Punkt $t \in [a,b)$ der rechtsseitige Grenzwert und für alle $t \in (a,b]$ der linksseitige Grenzwert existiert.

Aufgabe 4* Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax + Bu(t)$, $x(0) = x^0$. Die Eingabefunktion u entstamme dem Raum der *lokal integrierbaren Funktionen*

$$\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ ist messbar und} \\ \forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ kompaktes Intervall} : \int_I \|f(t)\|\, dt < \infty \end{array} \right\}.$$

Eine Funktion $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ heißt *Lösung des Anfangswertproblems*, falls sie die Integralgleichung

$$x(t) = x^0 + \int_0^t Ax(\tau) + Bu(\tau)\, d\tau$$

für alle $t\in\mathbb{R}$ erfüllt.

(i) Zeigen Sie, dass die bekannte Variation-der-Konstanten-Formel

$$x(\cdot; x^0, u) = e^{A\cdot}x^0 + \int_0^{\cdot} e^{A(\cdot-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau$$

für alle $u\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ definiert und die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist.

(ii) Geben Sie $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $x^0\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ an, so dass die Lösung $x(\cdot;x^0,u)$ nicht überall differenzierbar ist.

(iii) Eine Funktion $f: I\to\mathbb{R}^m$ auf einem kompakten Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ heißt *absolut stetig*, falls für alle $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, so dass für alle $k\in\mathbb{N}$ und alle $a_i,b_i\in I$, $i=1,\dots,k$ mit

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_k < b_k$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^k b_i - a_i < \delta \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^k \|f(b_i)-f(a_i)\| < \varepsilon.$$

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ heißt *lokal absolut stetig*, wenn sie eingeschränkt auf jedes kompakte Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ absolut stetig ist.

Zeigen Sie: Wenn es ein $g\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ gibt, so dass

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t g(\tau)\, d\tau,\;\; t_0\in\mathbb{R}$$

für alle $t\in\mathbb{R}$ ist, dann ist f lokal absolut stetig.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es für alle kompakten Intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$ und $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so dass für alle messbaren Mengen $E\subseteq I$ mit $\mu(E)<\delta$ gilt: $\int_E \|g\|\, d\mu < \varepsilon$.

(iv) Folgern Sie, dass $x(\cdot;x^0,u)$ lokal absolut stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie für (i) die Variation der Konstanten-Formel für $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ Funktionen, d.h. für $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $F(x):=\int_a^x f(t)dt$, $G(x):=\int_a^x g(t)dt$ gilt

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Abgabe der mit * markierten Aufgaben als Hausaufgabe vor der Übung am 8. November 11 Uhr.