Institut für Mathematik
Prof. K. Worthmann
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Angewandte Analysis

4. Übungsserie zur Besprechung am 06.12.2019

Abgabe der mit * markierten Aufgabe bis zum 18.12.19 in meinem Büro C230.

Aufgabe 13
Bestimme die zulässige Menge $\mathcal{C}$ für das zweidimensionale lineare System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} x(t) + u(t)b$$

für $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuche die Menge $\mathcal{C}$ für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14
Untersuche die Existenz einer Nullumgebung in der zulässigen Menge $\mathcal{C}$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + 3x_2^2 + x_2x_3 - u_1e^{u_2} + u_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - 3x_1x_2 - x_1x_3 + u_1^2 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3x_1^2 - x_3x_2^2 - x_3^3 + e^{u_1} + e^{3u_2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 15
Betrachten Sie das System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)u(t) \\ -u(t) \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie zunächst das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $u \in \mathcal{U}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $K(t; x^0)$ und untersuchen Sie sie auf Konvexität.

Aufgabe 16*
Betrachten Sie das skalare Steuerungsproblem mit Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = t^3 \sin(1/t)u(t),$$

Steuerbeschränkungen $-1 \leq u(t) \leq 1$ und Endbedingung $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(1) = [-a, a]$ mit

$$a = \int_0^1 t^3 \, |\sin(1/t)| \, \mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie zudem, dass man die Randpunkte von $\mathcal{C}(1)$ nur nach 0 steuern kann, wenn man eine Steuerung verwendet, die unendlich viele Sprungstellen besitzt.