1 Hilfssatz zum Bang-Bang-Prinzip

Wir wollen den folgenden Satz aus der Vorlesung beweisen.

Theorem 1. *Der Operator $T : U([0,1]) \to \mathbb{R}^n$ mit $T(u) := \int_0^1 e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau$ ist linear und bildet konvexe Mengen auf konvexe Mengen sowie schwach-kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab.*

Proof. Wir fassen $U([0,1])$ als Unterraum vom Hilbertraum $L^2([0,1])$ auf.

Da T linear ist, bildet es offenbar konvexe Mengen auf konvexe Mengen ab. Wir zeigen noch die Kompaktheit der Menge K. Da K eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, genügt es die Beschränktheit und die Abgeschlossenheit zu zeigen. Die Beschränktheit folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\|Tu\|_{L^2}^2 \leq \left\| \int_0^1 e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^1 \|e^{-A\tau} B\| d\tau \int_0^1 \|u(\tau)\| d\tau = M\|u\|_{L^2}^2.$$

für ein $M > 0$. Insbesondere ist T damit ein stetiger linearer Operator.

Ist X ein reflexiver Banachraum, so sind nach dem Satz von Banach-Alaoglu $\overline{B_1(0)}$, vgl. Sektion 2, schwach kompakt. Hieraus wurde in Proposition gefolgert, dass $U([0,1])$ schwach kompakt in $L^2[0,1]$ ist.

Da T stetig ist, bildet es schwach konvergente Folgen auf schwach konvergente Folgen ab (kleine Übungsaufgabe). Damit wird eine schwach kompakte Menge in $U([0,1])$ auf eine schwach kompakte Menge abgebildet. Da die Bildmenge in einem endlichdimensionalen Raum lebt und hier schwache Konvergenz und Norm-Konvergenz übereinstimmen folgt die Kompaktheit des Bildes. □

Allgemeiner heißen Operatoren mit der zweiten Abbildungseigenschaft *vollstetig* oder auch *kompakt*. Im nicht-reflexiven Banachraum fallen diese Begriffe jedoch auseinander.

2 Satz von Banach-Alaoglu

In einer allgemeinen Form gilt der Satz für normierte Räume.

Theorem 2. *E normiert mit topologischem Dualraum E' dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subseteq E'$ schwach*-kompakt.*

Die schwach*-Topologie kann mit Hilfe von Umgebungen definiert werden (vgl. Wikipedia). Ein Problem in dieser allgemeinen Formulierung ist, dass die schwache-Topologie und die schwach*-Topologie im allgemeinen nicht metrisierbar sind. Damit fallen auch im Allgemeinen die schwach*-kompaktheit und die schwach*-folgenkompaktheit auseinander. Nehmen wir aber zusätzlich an, dass E ein reflexiver Raum ist, dann kann man die (folgen) schwach*-Konvergenz auf dem Dualraum erklären durch

$$x'_n \to x' \text{ für } n \to \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad x'_n(x) \to x'(x), n \to \infty \quad \text{für alle } x \in E.$$

Desweiteren stimmen für E reflexiv, die schwache Konvergenz und die schwach*-Konvergenz auf X' überein. Insbesondere sind schwach*-Kompaktheit und schwache-Kompaktheit äquivalent. Insbesondere erhält man dann die folgende Vereinfachung des obigen Satzes, vgl. Satz 6.9 im Alt.

Theorem 3. *Ist X ein reflexiver Raum, dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subseteq X$ schwach-kompakt.*

In der Vorlesung wurde diese Aussage für den Hilbertraum $X = L^2[0,1]$ verwendet. Man beachte, dass nach dem Beispiel aus der Vorlesung die Folge $\{u_n\}$ mit $u_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot)$ in der Einheitskugel in $L^2[0,1]$ liegt, dies aber keine konvergente sondern nur eine schwach konvergente Teilfolge enthält. Insbesondere ist damit die abgeschlossene Einheitskugel in unendlichdimensionalen Räumen nicht kompakt. In Fuktionalanalysis zeigt man später die Äquivalenz der Kompaktheit zur Unendlichdimensionalität.