# Lösungen Angewandte Analysis

February 13, 2020

**Aufgabe 1**

(a) Wir formulieren zunächst die Differenzialgleichung als ein System erster Ordnung:

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{1}$$
$$m\dot{x}_2 = -mg + f(t), x_1(0) = \xi_1, x_2(0) = \xi_2. \tag{2}$$

Wir dividieren in der zweiten Gleichung durch die Masse $m > 0$ und schreiben das Gleichungssystem formal als ein System mit dem Eingang $u(t) = f(t)/m - g$:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b} u(t).$$

Die Zielmenge ist offenbar (wie beim Raketenauto) gegeben durch

$$\mathcal{T}(t) = \{(0,0)^T\} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(b) Sei $t_1 > 0$ und $u(t) = \alpha t - \beta$. Für die Variation der Konstanten-Formel bestimmen wir

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = A + At = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 & t_1 - s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + \beta s \end{pmatrix} ds \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach kurzer Rechnung findet man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \xi_1 + t_1\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(t_1^2 - t_1^2/2) + \beta(t_1^3/2 - t_1^3/3) \\ \alpha t_1 + \beta t_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher setzen wir

$$\alpha = -\xi_2/t_1 - \beta t_1$$

und erhalten in der ersten Gleichung

$$\xi_1 + t_1\xi_2 - \xi_2 t_1/2 - \beta t_1^3/12 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\beta = \frac{12}{t_1^3}(\xi_1 + t_1\xi_2/2).$$

(c) Analog zu (b) berechnet man mit $\xi_2 = \dot{h}(0) = 0$ und $\xi_1 = h(0) > 0$, dass

$$\begin{pmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} (t_2 - s)(-g) \\ -g \end{pmatrix} ds + \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} (t_2 - s)(F/m - g) \\ F/m - g \end{pmatrix} ds.$$

Hier findet man mit der gleichen Methode

$$t_1 = (1 - \frac{gm}{F})t_2, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}\frac{\xi_1}{1 - \frac{gm}{F}}}.$$

*Für die Übung: Ist die hier angegebene Steuerung aus $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_{BB}$ oder $\mathcal{U}_{PC}$? Es ist nur aus $\mathcal{U}_{PC}$, weil der Betrag der Komponenten von $u$ nicht durch 1 nach oben beschränkt ist. Kann man das System so verändern, dass die Steuerung Bang-Bang gewählt werden kann?*

**Aufgabe 2**

(a) Wir modellieren die Fischfarm durch das (nicht)lineare skalare System

$$\dot{x}(t) = rx(t)(1 - x(t)/K) + u(t) = rx(t)(1 - x(t)/K) - Ex(t).$$

Für einen Anfangswert $x(0) = x^0$ ist die Lösung gegeben durch (Trennung der Veränderlichen)

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x(r - E - xr/K)} = \int_0^t 1 d\tau = t$$

mit Partialbruchzerlegung findet man

$$\frac{1}{x(r - E - xr/K)} = \frac{\frac{r}{K(r-E)}}{x} - \frac{\frac{r}{K(r-E)}}{x - \frac{(r-E)K}{r}}$$

und daher

$$\frac{1}{(r - E)}\left[\ln(x) + \ln\left(\frac{(r - E)K}{r} - x\right)\right] = t + c.$$

Anwenden der Exponentialfunktion ergibt

$$\frac{\frac{(r-E)K}{r} - x}{x} = e^{-(r-E)(t+c)}.$$

Auflösen ergibt mit der (zeitlichen) Konstanten $C = C(x^0)$

$$x(t; x^0) = \frac{\frac{(r-E)K}{r}}{1 + C(x^0)e^{-(r-E)t}}. \tag{3}$$

Wie in der Übung erwähnt, bestimmt man $C(x^0)$ durch auflösen von $x(0; x^0) = x^0$.

(b) Die Gleichgewichte sind genau die Lösungen der skalaren Gleichung

$$rx^*(1 - x^*/K) - Ex^* = 0$$

Wieso eigentlich? Aus der quadratischen Gleichung erhält man die Lösung

$$x_1^* = 0, \quad \text{und} \quad x_2^* = \frac{(r-E)K}{r}.$$

Sinnvollerweise, müssen wir also $r > E$ Voraussetzen, wir können nicht mehr Fische fangen, als natürlich nachwachsen.

(c) Die Lösungsdarstellung aus (a) führt auf

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x^0) = \lim_{t\to\infty} \frac{(r-E)K}{r} \frac{1}{1 + C(x^0)e^{-(r-E)t}} = x_2^*.$$

(d) Die Fangzahl wird aufgefasst in Abhängigkeit von $E$, d.h. als Funktion $E \mapsto Ex^* = E(r - E)K$. Das Maximum dieser nach unten geöffneten Parabel mit den Nullstellen $E = 0$ und $E = r$ ist bei $r/2$. Die Fangzahl wir also für $E = r/2$ maximal.

*Bemerkungen: Sei $E = 0$ zur Vereinfachung, wie erhält man dann die Parameter $r$ und $K$ die im Modell auftauchen? Man nutzt die Lösungsformel (3) und beobachtet die Fischbestände zu drei Zeitpunkten $t_i$ mit den Werten $F(t_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Nun lösen wir das Gleichungssystem $F(t_i) = x(t_i; x^0)$, $i = 1, 2, 3$ nach den Parametern $C(x_0)$, $r$ und $K$ auf. Man sollte das mal mit einer anderen Erntefunktion $u(t) = -h$ vergleichen.*

**Aufgabe 3**

(a) Die angegebene Funktion ist nicht stückweise konstant, weil es keine endliche Zerlegung $s_0 = 0 < s_1 \ldots < s_k = 1$ gibt, sodass $u|_{[s_i, s_{i+1})}$ konstant ist. Jedoch ist $u$ eine Regelfunktion, da in jedem Punkt die entsprechenden rechts- und linksseitigen Grenzwert existieren (ohne Beweis).

(b) Betrachte die Funktion

$$\hat{u} : [0, 1] \to [0, 1], \quad \hat{u}(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{für } t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Die Funktion $\hat{u}$ ist offenbar eine Bang-Bang-Funktion, da $|u(t)| = 1$ für alle $t \in [0,1]$, jedoch ist $\hat{u}$ keine stückweise konstante Funktion, da jedes vorgegebene Intervall $[s_i, s_{i+1})$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält.

(c) Die Funktion $\hat{u}$ aus (b) ist auch keine Regelfunktion, da es für alle $x_0 \in [0,1]$ Folgen im Definitionsbereich $[0,1]$ gibt, die verschiedene Grenzwerte 1 und $-1$ besitzen. Hierzu wählt man einmal eine Folge irrationaler Zahlen die gegen $x_0$ konvergiert und einmal eine Folge rationaler Zahlen. Das heißt, dass weder der rechtsseitige noch der linksseitige Grenzwert existiert.

**Aufgabe 5** Ansatz: Summe der Klassen ist in jedem zeitpunkt konstant.

**Aufgabe 7**

Gegeben sei $y \notin \overline{C}$, dann existiert nach dem Projektionssatz ein $x_0 \in \overline{C}$ sodass

$$\|y - x_0\|^2 \leq \|x - x_0\|^2, \quad (y - x_0)^T (x - x_0) \leq 0 \tag{4}$$

für alle $x \in \overline{C}$. Wir definieren

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : (x_0 - y)^T (x - y) = 0\}, \quad a := (x_0 - y), \gamma := (x_0 - y)^T y.$$

Idee: Differenzvektor $y - x_0$ steht orthogonal auf der Tangentianebene der konvexen Menge in $x_0$ und $x = y$ muss die Gleichung erfüllen. Die zweite Ungleichung in (4) impliziert daher $\overline{C} \subseteq H_+$, mit dem Halbraum $H_+$ den man erhält, wenn man in der Definition von $H$ das '=' durch ein '$\geq$' ersetzt. Da $y \notin \overline{C}$ gilt $\|y - x_0\| > 0$. Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\inf_{x \in \overline{C}} (x_0 - y)^\top (x - y) &= \inf_{x \in \overline{C}} (x_0 - y)^\top (x - x_0 + x_0 - y) \\
&= \|x_0 - y\|^2 + \inf_{x \in \overline{C}} (x_0 - y)^\top (x - x_0) \\
&\geq \|x_0 - y\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet $a^T y < \inf_{x \in \overline{C}} a^T x$. Beweis von (b) haben wir eben schon geführt.

**Aufgabe 8**

Die Lösungen verlaufen auf Kreisbahnen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x_1^2(t) + x_2^2(t)) &= 2\dot{x}_1(t)x_1(t) + 2\dot{x}_2(t)x_2(t) \qquad (5) \\
&\overset{DGL}{=} -2(1-t)x_2(t)x_1(t) + 2(1-t)x_1(t)x_2(t) = 0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

damit ist der Radius der Lösungen $(x_1(t), x_2(t))$ für alle $t \in [0,1]$ konstant. Da sich die Lösungen auf einer Kreisbahn bewegen und sich für $t > 1$ die $x_1$-Koordinate nicht mehr verändert, muss bereits $x_1(1) = 0$ gelten. Darüberhinaus muss $x_2(1) > 0$ gelten, denn die Lösung $x_2$ ist streng monoton fallend ab $t > 1$, sodass $x_2(t_1) = 0$ für kein $t_1 > 1$ möglich wäre. Nach Transformation auf Polarkoordinaten erhalten wir

$$x_1(t) = r\cos\varphi(t), \quad x_2(t) = r\sin\varphi(t)$$

sodass

$$\dot{x}_1 = -(t-1)x_2 = -r\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t), \quad \dot{x}_2 = (t-1)x_1 = r\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t) = \dot{\varphi}().$$

Wir erhalten also die DGL $\dot{\varphi}(t) = 1 - t$ mit der Lösung $\varphi(t) = t - t^2/2 + \varphi_0$, wobei $\varphi_0$ gleich dem Winkel der Anfangswerte in Polarkoordinaten ist. Die Menge der steuerbaren Anfangszustände ist also dadurch charakterisiert, dass $x_1(1) = 0$, also $\varphi(1) = \pi/2$ oder $\varphi(1) = 3\pi/2$ Hierbei entfällt der zweite Wert, wegen $x_2(1) < 0$. Somit folgt

$$\varphi(1) = 1 - 1^2/2 + \varphi_0 = \pi/2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Damit ist die Menge der steuerbaren Anfangszustände eine Halbgerade im ersten Quadranten der $x_1x_2$-Ebene gegeben in Polarkoordinaten durch $\varphi = \varphi_0$. Hieraus folgt, dass Trajektorien, die in $\mathcal{C}$ starten höchstens den Anfangszustand oder Null enthalten. Das sollte in Teil (c) gezeigt werden.

**Aufgabe 9**

Wir untersuchen zunächst das Kriterium aus Satz 2.3: $0 \in \text{int}\mathcal{C}$ genau dann wenn $\text{rk}\,[b, Ab, A^2b] = 3$. Offenbar gilt $A^2 = -A$. Damit liegt für alle $b$ lineare Abhängigkeit vor, sodass unabhängig von $\beta \in \mathbb{R}$ gilt dass $\text{rk}\,[b, Ab, A^2b] \leq 2$. Somit gilt für kein $\beta \in \mathbb{R}$, dass $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$. Modifizieren wir allerdings die Matrix $A$ und betrachten stattdessen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dann wird es etwas spannender und wir erhalten für die Steuerbarkeitsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \beta & \beta & 0 \\ \beta & 0 & -\beta \\ \beta & -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist

$$\det M = -3\beta^3$$

Damit ist $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^3$ falls $\beta = 0$. Ist $\beta \neq 0$, dann zeigen wir noch, dass $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$. Hierzu nutzen wir Satz 2.3, wonach $\mathcal{C}$ eine Nullumgebung $U$ enthält. Für die DGL bestimmen wir ein Lösungsfundamentalsystem. Wir sehen, dass die Lösung für einen beliebigen Anfangswert $x^0$ gegen 0 konvergiert. Somit existiert eine Zeit

$t_0$, ab der wir in der Nullumgebung $U \subseteq \mathcal{C}$ sind. Nun existiert eine Steuerung $u \in \mathcal{U}$, welche die Lösung in endlicher Zeit nach 0 steuert.

**Aufgabe 10**

Angenommen, es gilt $AV \subseteq V$, dann ist auch für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^k}{k!} V \subseteq V.$$

Wir verwenden, dass $V$ abgeschlossen ist (warum?), woraus für jedes $x^0 \in V$ folgt dass

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(At)^k}{k!} x^0 \in V.$$

Daher gilt

$$e^{At} V \subseteq V, \quad \forall t \geq 0.$$

Um die Umkehrung zu sehen betrachtet man ene Art Differenzenquotient, um das $A$ zu erhalten: Es gilt

$$\frac{e^{At} - I}{t} V \subseteq V, \quad \forall t > 0.$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit gilt daher auch für den Grenzwert $t \downarrow 0$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{At} - I}{t} V \subseteq V.$$

Da aber $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{e^{At}-I}{t} = A$ folgt die Behauptung.

**Aufgabe 11**

(a) Wir überprüfen die Rang-Bedingung für die Matrix $[B, AB, A^2B, A^3B]$ aus Satz 2.3: (hierbei vernachlässigen wir die letzten beiden Blockspalten, weil bereits $\operatorname{rk}[B, AB] = 4$):

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk}[B, AB, A^2B, A^3B] &\geq \operatorname{rk}[B, AB] \\
&= \operatorname{rk}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \operatorname{rk}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\omega \\ 0 & 1 \\ -2\omega & 0 \end{pmatrix}\right] = 4
\end{aligned}$$

Aus der trivialen Ungleichung $\mathrm{rk}[B, AB, A^2B, A^3B] \leq 4$ folgt daher $\mathrm{rk}[B, AB, A^2B, A^3B] = 4$ womit nach Satz 2.3 folgt, dass $0 \in \mathrm{int}\mathcal{C}$. Nach Satz 2.5 müssen wir für $\mathcal{C} = \mathbb{R}^4$ noch sicherstellen, dass $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$. Die Eigenwerte von $A$ sind offenbar gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega.$$

Somit ist $\mathcal{C} = \mathbb{R}^4$.

(b) Wir untersuchen nun wie sich die Steuerbarkeitsmenge $\mathcal{C}$ verändert, falls jeweils eines der Triebwerke ausfällt.

Falls das erste Triebwerk ausfällt, das heißt $u_1 \equiv 0$, dann lautet die Rang-Bedingung

$$\mathrm{rk}[b, Ab, A^2b, A^3b] = \mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\omega\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\omega\\0\\0\\-4\omega^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\omega^3\\-4\omega^2\\0\end{pmatrix}\right] = 4$$

sodass wie in (a) weiterhin $\mathcal{C} = \mathbb{R}^4$ gilt. Fällt hingegen das zweite Triebwerk aus, das heißt es gilt $u_2 \equiv 0$, dann lautet die Rang Bedingung

$$\mathrm{rk}[b, Ab, A^2b, A^3b] = \mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\omega\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\omega^2\\-2\omega\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\omega^2\\0\\0\\2\omega^3\end{pmatrix}\right] = 3 < 4,$$

weil die zweite und vierte Spalte linear abhängig sind. Nach Satz 2.3 ist somit $0 \notin \mathrm{int}\mathcal{C}$.

**Aufgabe 12**

Für die Erreichbarkeits-Menge $K(t;0)$ des zeitumgekehrten Systems $\dot{x} = -Ax - Bu$ und die Menge der zulässigen Anfangszustände $\mathcal{C}(t)$ des Systems $\dot{x} = Ax + Bu$ gilt

$$\mathcal{C}(t) = K(t;0). \tag{7}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass ein $\alpha > 0$ existiert sodass $\mathcal{B}_\alpha(0) \subseteq \mathcal{C}(1)$. Nach Voraussetzung existiert für $\delta$ und den kanonischen Einheitsvektor $e_i$ eine Steuerung $u_i \in \mathcal{U}$ und eine Zeit $t_i$ sodass (nach Substitution $t_i - s = \hat{s}$)

$$\delta e_i = x(t_i; 0; u_i) = -\int_0^{t_i} e^{-A(t_i - s)} B u_i(s) ds = -\int_0^{t_i} e^{-A\hat{s}} B u_i(t_i - \hat{s}) d\hat{s}.$$

Definiert man nun $T := \max_{i=1,\ldots,n} t_i$ und eine Steuerung $\hat{u}_i$ mittels

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq t \leq T - t_i \\ u_i(t_i - T + t), & \text{falls } T - t_i \leq t \leq T, \end{cases}$$

dann gilt zunächst $\hat{u}_i \in \mathcal{U}[0,T]$ sowie

Idee: Uniformisiere die Endzeit...

$$x(T;0,\hat{u}_i) = \int_0^T e^{-A\hat{s}} B\hat{u}_i(T-\hat{s})d\hat{s} = -\int_0^{t_i} e^{-A\hat{s}} Bu_i(t_i-\hat{s})d\hat{s} = \delta e_i.$$

Des Weiteren existiert auch für jedes $\hat{\delta} \in (-\delta, \delta)$ eine entsprechende Steuerung aus $\mathcal{U}[0,T]$ (einfach Reskalieren mit $\frac{\hat{\delta}}{\delta}$ und in das $u$ stecken). Die Idee ist, dieses Hilfsergebnis zu benutzen, um die Steuerbarkeit in jeden Punkt einer geeigneten Nullumgebung zu zeigen. Hierfür verwenden wir die Linearität in der Steuerung $u$ und bilden für $\delta_i \in (-\delta, \delta)$ Linearkombinationen

$$(\delta_i)_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n \delta_i e_i = \int_0^T e^{-A\hat{s}} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i(T-\hat{s})d\hat{s} \tag{8}$$

mit den entsprechenden oben konstruierten Steuerungen $\hat{u}_i$ für $\delta_i e_i$. Da im allgemeinen $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \notin \mathcal{U}[0,T]$ jedoch $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \in \mathcal{U}[0,T]$ reskalieren wir in (8), sodass

$$M := \left(-\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{n}\right)^n \subseteq K(T;0) = \mathcal{C}(T).$$

Da $M$ offen ist, gilt für geeignetes $\hat{\alpha}$, dass $\mathcal{B}_{\hat{\alpha}}(0) \subseteq M \subset \mathcal{C}(T)$. Nach der Bemerkung zu Satz 2.3 folgt daher, dass auch $\mathcal{C}(1)$ eine Nullumgebung $B_\alpha(0)$ enthält und aus (7) mit $t = 1$ folgt die Behauptung.

**Aufgabe 13**

Wir transformieren die Systemmatrix auf Diagonalform und erhalten für das transformierte System mit $z = Ux$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \dot{z} = U\dot{x} &= UAU^{-1}Ux + u(t)Ub \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z + u(t)Ub \end{aligned}$$

Für $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\top$ folgt $Ub = (1,0)^\top$. Wir können offenbar die zweite Komponente von $z$ nicht steuern, sodass für die zulässigen Anfangswerte $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, $z_2^0 = 0$ gelten muss. Des Weiteren erhält man mit den Überlegungen aus Aufgabe 4, dass $z_1^0 \in (-1/2, 1/2)$. Daher ist die Menge $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$U\mathcal{C} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \{0\}$$

Wir transformieren nun zurück in das Ursprüngliche Koordinatensystem mit $x = U^{-1}z = U^T z$, sodass

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}(1,1)^\top : t \in (-1/2, 1/2) \right\}.$$

Falls $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^\top$ erhält man analog aus Aufgabe 4, dass

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}(1,-1)^\top : t \in (-1/2, 1/2) \right\}.$$

Ist $b = (1,0)^\top$, so überprüfen wir das Rangkriterium aus Satz 2.3

$$\text{rk}\ [b, Ab] = \text{rk}\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} = 2$$

sodass $\mathcal{B}_\delta(0) \subseteq \mathcal{C}$ für ein $\delta > 0$. Jedoch haben wir keinerlei Indiz wie groß $\delta$ ist. Wir versuchen eine möglichst große Teilmenge von $\mathcal{C}$ zu bestimmen (Innere Approximation). Hierfür betrachten wir für einen Zeitpunkt $T > 0$ mit Variation der Konstanten

$$0 = e^{At}x^0 + \int_0^T e^{A(t-s)}bu(s)ds$$

Wir transformieren wie oben die Gleichung mit $U$ und erhalten die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= Ue^{AT}U^{-1}z^0 + \int_0^T Ue^{A(T-s)}U^{-1}Ubu(s)ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{2T}z_1^0 \\ e^{-T}z_2^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^T \begin{pmatrix} e^{2(T-s)} \\ e^{-(T-s)} \end{pmatrix} u(s)ds \end{aligned}$$

Eine Teilmenge von $\mathcal{C}$ erhält man, wenn man nur konstante Funktionen $u$ betrachtet. wir setzen $u(s) = 1$ für alle $s \in [0,T]$ und erhalten die Gleichungen

$$z_0^1 = 1/2e^{-2T} - 1/2, \tag{9}$$

$$z_1^0 = 1 - e^T. \tag{10}$$

Fassen wir $T > 0$ als Parameter auf, so beschreibt der Graph der Funktion

$$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad g(T) := (1/2e^{-2T} - 1/2, 1 - e^T)^\top$$

die obigen Gleichungen den Rand unserer inneren Approximation im $z$-Koordinatensystem. Analoges gilt für $u(s) = -1$ für alle $s \in [0,T]$. Nun verwenden wir die Konvexität von $\mathcal{C}$, da wir ein lineares System haben und erhalten die innere Approximation als konvexe Hülle (vgl. Abbildung 2)

$$\text{co}(\text{graph} g \cup \text{graph}(-g)) \subseteq \mathcal{C}.$$

Diese Approximation ist in Abbildung 1 dargestellt. Zur Veranschaulichung wurde der Logarithmus der Einträge dargestellt. Man sieht, dass die Menge $\mathcal{C}$ tatsächlich unbeschränkt ist. Der Satz 2.3 garantiert nur, dass eine (hinreichend kleine) Nullumgebung in $\mathcal{C}$ enthalten ist.

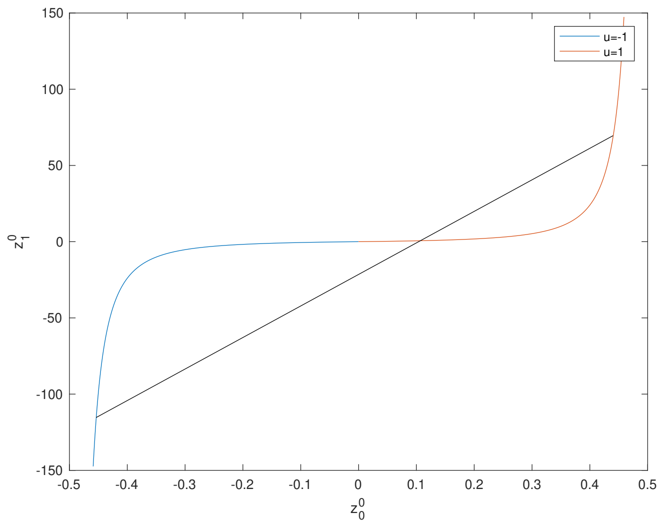


Figure 1: Hier ist eine Innere Approximation für $\mathcal{C}$ für $b = (1, 0)^\top$ dargestellt, wobei die schwarze Linie das bilden der Konvexen Hülle andeuten soll. Auf der $z_0^0$-Achse liegen Polstellen bei $z_0^0 = \pm 1/2$.

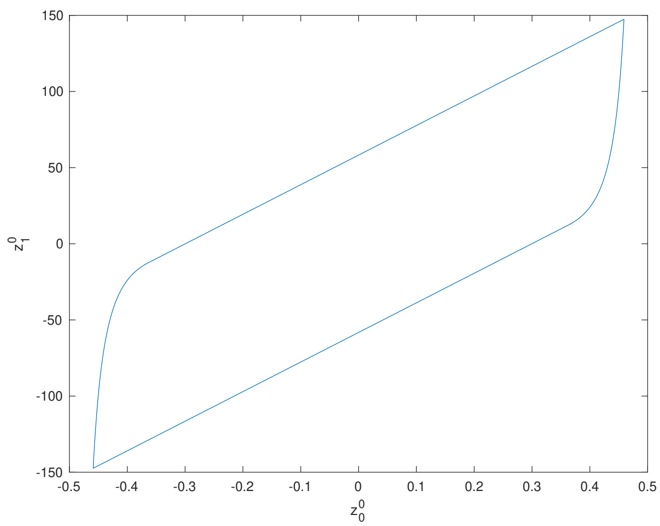


Figure 2: Konvexe Hülle des Graphen aus Abbildung 1.

Man könnte nun versuchen die innere Approximation zu verbessern, indem man Funktionen $u$ betrachtet die genau eine Sprungstelle besitzen.

Variante: Man bestimme die Menge $\mathcal{C}$, falls $A$ ein $2 \times 2$ Jordanblock ist!

**Aufgabe 14**

Man beachte, dass der Satz 2.7 nicht angewendet werden kann, da $f(0,0) \neq 0$. Man müsste hier wohl eine andere Linearisierung verwenden. Wir argumentieren indirekt und zeigen, dass $\mathcal{C}$ keine Nullumgebung enthält. Angenommen es existiert eine solche Umgebung, dann existieren insbesondere für alle $x^0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$ eine Steuerung $u \in \mathcal{U}$, sodass

Aufgabe komisch, weil für Nullsteuerung ja nicht Null als Gleichgewicht rauskommt! Daher müsste man hier eher die steuerebare Menge in das tatsächliche Gleichgewicht betrachten!

$$x(\hat{t}; x^0, u(\cdot)) = 0. \tag{11}$$

Wir betrachten nun die dritte Komponente und verwenden $|u(t)| \leq 1$ für alle $t \geq 0$:

$$\dot{x}_3 = -x_3 x_1^2 - x_3 x_2^2 - x_3^3 + e^{u_1} + e^{3u_2} > -x_3 \|x\|_2^2 + e^{-1}. \tag{12}$$

Wir da $x^0 \in \mathcal{B}_\delta(0)$ können wir insbesondere annehmen, dass $x_0 \in \mathbb{R}^3_+$ und $\|x^0\| < \varepsilon$ mit $\varepsilon < \delta$ beliebig. Für $\varepsilon^3 < e^{-1}$ folgt $\dot{x}_3(t) > 0$ falls $x_3(t) > 0$, womit (11) verletzt wäre.

**Aufgabe 15**

(a) Wir integrieren die DGL zusammen mit den Anfangswerten $x^0 = (1,0)^\top$ folgt $\varphi(0) = 0$, $r(0) = 1$ und

$$\varphi(t) = \int_0^t u(s)ds, \quad r(t) = e^{\int_0^t u(s)ds}.$$

(b) Offenbar ist

$$K(t; x^0) = \{(\varphi(\tau), r(\tau)) : 0 \leq \tau \leq t\} = \left\{(z, e^z) : z = \int_0^t u(s)ds, u \in \mathcal{U}\right\}$$

Aufgrund der Beschränkung $-1 \leq u(t) \leq 1$ folgt

$$-t \leq \int_0^t u(s)ds \leq t.$$

Sodass

$$K(t; x^0) = \{(\tau, e^\tau) : -t \leq \tau \leq t\}.$$

Diese Menge ist offenbar nicht konvex.

**Aufgabe 16**

Wir bestimmen die Lösung in Abhängigkeit von $u(t)$ und $x^0$:

$$x(1) = x^0 + \int_0^1 s^3 \sin(1/s) u(s) ds \stackrel{!}{=} 0.$$

Offenbar findet man für $x^0 = a = \int_0^1 s^3 \sin(1/s) ds$ die Steuerung $u(t) = \operatorname{sgn} \sin(1/t)$, welche unendlich viele Sprungstellen besitzt. Desweiteren erhält man durch geeignetes Nullsetzen (abschneiden ab gewissem Zeitpunkt) dieser Steuerung erhält man eine Steuerung für alle $-a < x^0 < a$. Es verbleibt zu zeigen, dass man keine Steuerung für $x^0 = a$ findet, welche nur endlich viele Vorzeichenwechsel besitzt. Sei $\hat{u}$ eine Steuerung mit nur endlich vielen Sprungstellen, dann gilt vor der letzten Sprungstelle, wegen $\hat{u}(t) \leq 1$:

$$\int_0^t s^3 \sin(1/s) \hat{u}(s) ds \leq \int_0^t s^3 |\sin(1/s)| ds$$

Vor der kleinsten Sprungstelle $t_*$ bleibt das Vorzeichen von von $\hat{u}$ gleich, sodass

$$\int_0^{t_*} s^3 \sin(1/s) \hat{u}(s) ds < \int_0^{t_*} s^3 |\sin(1/s)| ds$$

und damit

$$\int_0^1 s^3 \sin(1/s) \hat{u}(s) ds < \int_0^{t_*} s^3 |\sin(1/s)| ds + \int_{t_*}^1 s^3 |\sin(1/s)| ds < a.$$

**Aufgabe 17**

(a) Wir bestimmen die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x_1 = -1 + \int_0^t u_1(s) ds, \quad x_2 = \int_0^t u_2(s) ds. \tag{13}$$

Wählt man von $u_1$ uns $u_2$ konstant 1 oder $-1$ mit einem anschließenden Sprung auf 0, dann folgt

$$K(t; x^0) = \{(-1 + \tau, \tau)^\top : -t \leq \tau \leq t\}.$$

Die Menge $\mathcal{RC}(x^0)$ ist eine Pyramide mit Spitze in $(0;0;0)$ und quadratischer Grundfläche $K(t;x^0)$ die symmetrisch bezüglich der $t$-Achse liegt.

(b) Sei $u(t) = (1, \Phi(t))^\top$ eine Steuerung mit $\int_0^t \Phi(s) ds = 0$ und sodass

$$x_1(t) = -1 + \int_0^1 ds = 0, \quad x_2(t) = \int_0^t \Phi(s) ds = 0.$$

Angenommen es existiert eine Steuerung $\hat{u} : [0, T] \to \mathbb{R}$ nach Null mit $T < 1$. Wegen $|\hat{u}(t)| \leq 1$ und (13) ist dann jedoch $x_1(t) > 0$, womit die Steuerung $\hat{u}$ nicht einmal zulässig ist, sodass es sich nicht um eine Optimalsteuerung handeln kann.

**Aufgabe 18**

(a) Sei $T : X \to Y$ stetig und $x_n \rightharpoonup x^*$, dann gilt nach Definition der schwachen Konvergenz für alle $f \in X'$, dass $f(x_n) \to f(x^*)$ in $\mathbb{C}$. Da $T$ stetig ist, ist die Verkettung $f \circ T$ für alle $f \in X'$ stetig, sodass auch $f(Tx_n) \to f(Tx^*)$ für alle $f \in X'$ und damit nach Definition der schwachen Konvergenz $Tx_n \rightharpoonup Tx^*$.

(b) Im Raum der quadrat-summierbaren Folgen $\ell^2(\mathbb{N})$ wählen wir $\{(e_n)_n\}$, wobei $(e_n)_i = 1$, falls $i = n$ und $(e_n)_i = 0$ sonst. Diese Menge ist nicht Überdeckungskompakt Wähle als offene Überdeckung $U_i$ einen kleinen epsilon-Schlauch um $e_i$ (berücksichtige bei der Konstruktion die qudrat-summierbarkeit) aber schwach kompakt.

**Aufgabe 19**

Wir können Annehmen, dass $A$ bereits in Jordan-Normalform ist (weil die Transformationsmatrizen invertierbar sind) und zeigen die Aussage daher nur für $A = J_n(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (Jordanblock der Größe $n$). Aus der Behauptung folgt, dass für alle $\chi_{[t_1,t_2]}$

$$\begin{aligned}&\int_0^{t^*} \chi_{[t_1,t_2]}(s)e^{-As}B(u(s)-w(s))ds\\ &= -\int_0^{t_1} e^{-As}B(u(s)-w(s))ds + \int_0^{t_2} e^{-As}B(u(s)-w(s))ds = 0\end{aligned} \tag{14}$$

und damit gilt auch für jede Treppenfunktion $\tau$, dass das obige Integral verschwindet. Nun liegen die Treppenfunktionen dicht im Raum der einfachen Funktionen (also die Funktionen die zur Kontruktion des Lebesgue-Integrals verwendet wurden) als Teilraum von $L^2$ (vgl. die Definition des äußeren Lebesgue Maßes). Da $A = J_n(\lambda)$ ist

$$e^{-As} = e^{-\lambda s}\begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{(-t)^n}{n!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir in (14) folgt

$$(\tau(\cdot), e_n^\top B(w(\cdot)-u(\cdot))_{L^2} = 0$$

für jede Treppenfunktion $\tau$. Aufgrund der Dichtheit im $L^2$ folgt $e_n^\top B(w(t) - u(t) = 0$ für fast alle $t \in [0, t^*]$.

Nun arbeiten wir uns im Gleichungssystem durch anwendung des gleichen Arguments hoch und nutzen das die darunterliegenden Zeilen schon Null sind.

**Aufgabe 19**
Nach einer vorherigen Aufgabe ist die Funktion fast über all differenzierbar mit Ableitung

$$e^{-At}B(u(t) - w(t)) = 0, \quad \text{für fast alle } t \in [0,T].$$

Da $e^{-At}$ invertierbar ist, folgt die Behauptung.

**Aufgabe 22**
Nach dem Maximumprinzip gilt für eine zeitoptimale Steuerung $\operatorname{sgn} u_i(t) = \operatorname{sgn} h^T e^{-At} b_i$, wobei $b_i$ die $i$-te Spalte von $B$ ist. Daher muss nur gezeigt werden, dass die Funktion $t \mapsto h^T e^{-At} b_i$ höchstens $n-1$ Vorzeichenwechsel hat. Ohne Einschränkung habe $A$ n verschiedene reelle Eigenwerte. Da $e^{-At}b_i$ eine Lösung des linearen DGL Systems $\dot{x} = -Ax$ ist gilt die Darstellung $e^{-At}b_i = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t}$, sodass

$$h^T e^{-At} b_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\lambda_k t}.$$

Da das Problem normal ist, sind die obigen Funktionen ungleich der Nullfunktion, das heißt es gilt $\alpha_k \neq 0$ für ein $k$.

Wir zeigen nun per Induktion, dass jede Funktion

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\lambda_k t}$$

mit $\alpha_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$ die ungleich der Nullfunktion ist, höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt. Für $n = 1$ ist dies trivial. Angenommen die Funktion $f_n$ habe mindestens $n$ Nullstellen, dann hätte auch die Funktion

Trick, damit man durch Ableiten einen Summanden verliert

$$g_n(t) := e^{\lambda_n t} f_n(t) = \alpha_1 e^{(\lambda_n - \lambda_1)t} + \ldots + \alpha_1 e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})t} + \alpha_n$$

mindestens $n$ Nullstellen. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\alpha_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, sonst wäre die Behauptung bereits nach Induktionsvoraussetzung klar. Jedoch hat dann die Ableitung

$$g_n'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) e^{(\lambda_n - \lambda_i)t}$$

die Gestalt einer Funktion, ungleich der Nullfunktion (da die Eigenwerte verschieden sind ist mindestens ein Summand nicht null) aus der Induktionsvoraussetzung und somit mindestens $n-1$ Nullstellen. Wir erhalten somit einen Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Für komplexe Eigenwerte $\lambda_i$, sieht man Anhand des Pendelbeispiels aus Aufgabe 20, dass aufgrund der Periodizität der resultierenden Funktionen, beliebig viele Vorzeichenwechsel möglich sind.

**Aufgabe 23**

Versucht das Maximumprinzip direkt anzuwenden, dann folgt, dass nur $u = 0$ eien Optimalsteuerung ist. Andererseits kann man zeigen, dass alle $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 u(t)dt = 0$ Optimalsteuerungen sind. Will man dies aus dem Maximumprinzip herleiten, so muss man das erweiterte System aus der Aufgabenstellung betrachten.

In Zukunft sollten die Anfangswerte in Teil (b) so gewählt werden, dass man hier tatsächlich das Maximumprinzip benötigt

In (b) kann man ebenso durch direkte Rechnung zeigen, dass die Optimalsteuerung $u = 0$ ist. Das Problem sind die Anfangswerte für die Ableitung bei Null, diese sollte man anders wählen, um eine nicht triviale Lösungen zu erhalten.

In (c) kann man wieder durch direkte Rechnung (ohne Maximumprinzip) zeigen, dass $u(t) \equiv 1$ optimal ist. Alternativ kann man auch die Formel für die Steuerbarkeitsgramsche aus Systemtheorie verwendet werden.

**Aufgabe 24**

Aus der dritten Gleichung erhält man die Endzeit $t = 1$. Offenbar ist $0 \leq u_k(t) \leq 1$ und damit sind die Steuerungen aus der Menge der erlaubten Steuerungen. Desweiteren gilt

$$\sin(2\pi u_k(t)) = \sin(2\pi(kt - [kt])) = \sin(2\pi kt)\cot(2\pi[kt]) + \cos(2\pi kt)\sin(2\pi[kt]) = \sin(2\pi kt).$$

Hieraus folgt

$$x_1(t) = \int_0^t \sin(2\pi u_k(\tau))d\tau = \int_0^t \sin(2\pi k\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi k}(1 - \cos(2\pi\tau))$$

insbesondere ist $x_1(1) = 0$ und damit

$$\int_0^1 x_1(\tau)^2 d\tau = \int_0^1 \frac{1}{2^2\pi^2 k^2}(1 - \cos(2\pi\tau))^2 d\tau = \frac{1}{4\pi^2 k^2}$$

wegen der Periodizität verschwinden die Integrale über die nicht konstanten Integranden. Analoge Betrachtungen für $x_2$ ergeben auch, dass $x_2(1; u_k) = 0$, sodass $u_k$ zulässig ist sowie den selben Wert für diesen Teil der Kostenfunktion und es folgt

$$J(u_k) = \frac{1}{2\pi^2 k^2}$$

was offenbar für $k \to \infty$ gegen Null konvergiert.

**Aufgabe 25**

Zum Beweis von (a) differenzieren wir $\dot{x}(t) = g(x(t))$, wobei $x$ eine fest gewählte Lösung der DGL ist. Nach Kettenregel erhalten wir $\ddot{x}(t) = g_x(x(t))\dot{x}(t)$. Dies können wir wieder als Differentialgleichung mit Lösung $\dot{x}$ und Anfangswert $\dot{x}(0)$ auffassen. Ist nun $b_0$ tangential zur Kurve $x$ in $t = 0$, dann ist $b_0 = c\dot{x}(0)$ für eine Konstante $c > 0$. Somit erfüllen die beiden Funktionen $c^{-1}b(\cdot)$ und $\dot{x}$ beide die gleiche DGL mit dem selben Anfangswert, sodass $\dot{x}(t) = c^{-1}b(\cdot)$. Damit haben wir sogar mehr gezeigt als gefordert, weil die Konstante zeitunabhängig ist.

Zum Beweis von (b) differenzieren wir das Skalarprodukt

$$\frac{d}{dt} < w(t), b(t) >= \dot{w}(t)^T b(t) + w(t)^T \dot{b}(t) = -w(t)^T g_x(x(t))^T b(t) + w(t)^T g_x(x(t)) b(t) = 0.$$