Lösungen Systemtheorie 1 WS2019/20

February 13, 2020

Die meisten Lösungen wurden von Tobias Posielek, Tobias Schucht, Thiemo Stechel und Jonas Witschel erstellt. Ich habe sie hier nur zusammengestellt.

Aufgabe 1

Für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt nach der Leibnizschen Regel:

$$K_i\big[e^{A(\cdot - T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(\cdot)\big]^{(i)}(s) = K_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} A^k e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0) \underbrace{\varphi^{(i-k)}(s)}_{=0 \text{ für } s=0,T}$$

$$\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} K_i\big[e^{A(\cdot - T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(\cdot)\big]^{(i)}(0) = K_i\big[e^{A(\cdot - T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(\cdot)\big]^{(i)}(T) = 0. \tag{1}$$

Damit folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T e^{A(T-s)}BK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i)}\,ds \\
&= \Big[e^{A(T-s)}BK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i-1)}\Big]_{s=0}^{T} - \int_0^T e^{A(T-s)}(-A)BK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i-1)}\,ds \\
&\overset{(1)}{=} 0 + \int_0^T e^{A(T-s)}ABK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i-1)}\,ds \\
&= \Big[e^{A(T-s)}ABK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i-2)}\Big]_{s=0}^{T} - \int_0^T e^{A(T-s)}(-A)ABK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i-2)}\,ds \\
&\overset{(1)}{=} 0 + \int_0^T e^{A(T-s)}A^2BK_i \cdot \big[e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i-2)}\,ds \\
&\dots \\
&= \int_0^T e^{A(T-s)}A^iBK_i e^{A(s-T)}(x^1 - e^{AT}x^0)\varphi(s)\,ds. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
x(T) &= e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)\,ds \\
&= e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}B\sum_{i=0}^{n-1}K_i\big[e^{A(s-T)}(x^1-e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i)}\,ds \\
&= e^{AT}x^0 + \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T e^{A(T-s)}BK_i\big[e^{A(s-T)}(x^1-e^{AT}x^0)\varphi(s)\big]^{(i)}\,ds \\
&\overset{(2)}{=} e^{AT}x^0 + \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T e^{A(T-s)}A^iBK_ie^{A(s-T)}(x^1-e^{AT}x^0)\varphi(s)\,ds \\
&= e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}A^iBK_i\Big)e^{A(s-T)}(x^1-e^{AT}x^0)\varphi(s)\,ds \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{A(T-s)}I_ne^{A(s-T)}(x^1-e^{AT}x^0)\varphi(s)\,ds \\
&= e^{AT}x^0 + \int_0^T (x^1-e^{AT}x^0)\varphi(s)\,ds = e^{AT}x^0 + (x^1-e^{AT}x^0)\int_0^T\varphi(s)\,ds \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} e^{AT}x^0 + (x^1-e^{AT}x^0)\cdot 1 = x^1.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung $x(T)=x^1$ gezeigt.

Aufgabe 2:
Voraussetzung: Seien Ω und $\mathcal{X}=\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) zwei Hilberträume mit den Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$. Weiterhin betrachten wir die stetigen und linearen Abbildungen:

$$L:\Omega\to\mathcal{X}\quad\text{und}\quad L^*:\mathcal{X}\to\Omega\quad\text{und}\quad W:\mathcal{X}\to\mathcal{X}\quad\text{mit}\quad W=LL^*.$$

Es gilt:

$$\forall\, x\in\mathcal{X}\ \forall\,\omega\in\Omega:\langle L\omega,x\rangle_{\mathcal{X}}=\langle\omega,L^*x\rangle_\omega.$$

1. *Behauptung:* $imLL^*=(\ker L^*)^\perp=imL$.

   Beweis:

   - $imL\subseteq(\ker L^*)^\perp$: Sei $x\in im\,L$ beliebig, so gibt es ein $\omega\in\Omega$, so dass gilt: $L\omega=x$.

     $$\forall y\in\ker L^*:\langle x,y\rangle_{\mathcal{X}}=\langle L\omega,y\rangle_{\mathcal{X}}=\langle\omega,L^*y\rangle_\Omega=\langle\omega,0_\Omega\rangle_\Omega=0$$
     $$\Rightarrow\ x\in(\ker L^*)^\perp.$$

   - $(\ker L^*)^\perp\subseteq imLL^*$: Wir nutzen aus, dass

     $$(\ker L^*)^\perp\subseteq\operatorname{im}LL^*\ \Leftrightarrow\ (\operatorname{im}LL^*)^\perp\subseteq(\ker L^*)^{\perp\perp}=\ker L^*.$$

Sei also $x \in (\operatorname{im} LL^*)^\perp$, dann ist $\forall y \in \mathcal{X} : \langle LL^*y, x\rangle_{\mathcal{X}} = 0$, also insbesondere

$$0 = \langle LL^*x, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle L^*x, L^*x\rangle_\Omega.$$

Aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt $L^*x = 0_\Omega$, das heißt $x \in \ker L^*$.

– $\operatorname{im} LL^* \subseteq \operatorname{im} L$ gilt wegen $\operatorname{im} L^* = L^*\mathcal{X} \subseteq \Omega$, also $\operatorname{im} LL^* = LL^*\mathcal{X} \subseteq L\Omega = \operatorname{im} L$.

Dies zeigt insgesamt $\operatorname{im} LL^* = (\ker L^*)^\perp = \operatorname{im} L$.

2. *Behauptung:* Der Operator W ist selbstadjungiert und positiv semidefinit.

Beweis: Seien $x, z \in \mathcal{X}$ beliebig, so gilt:

$$\langle Wx, z\rangle = \langle LL^*x, z\rangle = \langle L^*x, L^*z\rangle = \overline{\langle L^*z, L^*x\rangle} = \overline{\langle LL^*z, x\rangle} = \langle x, Wz\rangle.$$

Des Weiteren gilt wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts:

$$\langle Wx, x\rangle = \langle LL^*x, x\rangle = \langle L^*x, L^*x\rangle \geq 0.$$

3. (b)⇒(a): Nach Voraussetzung ist L^* injektiv, somit gilt

$$\ker L^* = \{0\} \;\Rightarrow\; \mathcal{X} = (\ker L^*)^\perp \overset{\mathbf{??}}{=} \operatorname{im} L.$$

Folglich ist L surjektiv.

(a)⇒(c) gilt wegen $\operatorname{im} W = \operatorname{im} LL^* \overset{\mathbf{??}}{=} \operatorname{im} L \overset{\text{Vor.}}{=} \mathcal{X}$.

– (c)⇒(d): Wie aus der linearen Algebra bekannt, folgt aus der Surjektivität des linearen Operators $W : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ unmittelbar die Bijektivität von W und damit $\det W \neq 0$.

– (d)⇒(e): $W = LL^*$ ist nach Voraussetzung bijektiv, damit muss L^* injektiv sein (da es ansonsten $x, y \in \mathcal{X}$ mit $x \neq y$ und $L^*x = L^*y$ gäbe, somit wäre $Wx = LL^*x = LL^*y = Wy$ und W nicht injektiv). Also ist $\forall x \in \mathcal{X} \setminus \{0\} : L^*x \neq 0$ und folglich

$$\langle Wx, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle LL^*x, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle L^*x, L^*x\rangle_\Omega > 0,$$

da das Skalarprodukt per Definition positiv definit ist.

– (e)⇒(b): Sei $x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist nach Voraussetzung

$$0 < \langle Wx, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle LL^*x, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle L^*x, L^*x\rangle_\Omega \;\Rightarrow\; L^*x \neq 0$$

nach Definition des Skalarprodukts. Dies zeigt $\ker L^* = \{0\}$ und damit die Injektivität von L^*.

Damit ist die Äquivalenz der Aussagen (a) bis (e) gezeigt.

- *Voraussetzung:* L surjektiv, $L^\sharp : \mathcal{X} \to \Omega$, $L^\sharp = L^*(LL^*)^{-1}$.

(α) *Behauptung:* $\forall x \in \mathcal{X} : L(L^\sharp x) = x$.

Beweis: Da L nach Voraussetzung surjektiv ist, gilt $\det LL^* = \det W \neq 0$ nach **??**. Somit existiert $(LL^*)^{-1}$, damit ist $L^\sharp = L^*(LL^*)^{-1}$ definiert und es gilt

$$\forall x \in \mathcal{X} : L(L^\sharp x) = LL^*(LL^*)^{-1}x = \operatorname{id} x = x$$

wie behauptet.

(β) *Behauptung:* Für alle $\omega \in \Omega$ mit $L\omega = x$ und $\omega \neq L^\sharp x$ gilt: $\|L^\sharp x\| < \|\omega\|$.

Beweis: Sei $\omega \in \Omega$, $x = L\omega$ und $\omega \neq L^\sharp x$. Dann sind ω und $L^\sharp x$ linear unabhängig: Angenommen, $\omega = \lambda \cdot L^\sharp x$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$L^\sharp x = L^\sharp L\omega = L^\sharp L\lambda L^\sharp x = \lambda L^\sharp L(L^\sharp x) \overset{\textbf{??}}{=} \lambda L^\sharp x \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \vee L^\sharp x = 0.$$

Somit wäre $\omega = L^\sharp x$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich müssen ω und $L^\sharp x$ linear unabhängig sein, und es gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|L^\sharp x\|^2 &= \|L^*(LL^*)^{-1}x\|^2 = \langle L^*(LL^*)^{-1}x, L^*(LL^*)^{-1}x\rangle \\
&= \langle LL^*(LL^*)^{-1}x, (LL^*)^{-1}x\rangle = \langle L\omega, (LL^*)^{-1}x\rangle = \langle \omega, L^*(LL^*)^{-1}x\rangle \\
&= \langle \omega, L^\sharp x\rangle < \|\omega\|\|L^\sharp x\| \quad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \|L^\sharp x\| < \|\omega\|.$$

Dies war zu zeigen.

(γ) *Behauptung:* $\|L^\sharp\| = \|W^{-1}\|^{1/2}$.

Beweis: Wir wollen zunächst zeigen, dass $\|W^{-1}\| = \lambda_{\max}$ gilt, wobei $\lambda_{\max}$ den größten Eigenwert von W^{-1} bezeichnet. Da W und damit auch W^{-1} selbstadjungiert und positiv definit ist, besitzt W^{-1} nur positive reelle Eigenwerte. Zudem existiert eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathcal{X}$, die aus lauter Eigenvektoren von W^{-1} zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besteht. Sei nun $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathcal{X}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in$

$\mathbb{K}$ beliebig, so gilt:

$$\begin{aligned}
\|W^{-1}x\|^2 &= \left\| W^{-1}\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|^2 \overset{\text{lin.}}{=} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i W^{-1} v_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i \right\|^2 \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \alpha_i \alpha_j \underbrace{\langle v_i, v_j\rangle}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \alpha_i^2 \leq \lambda_{\max}^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_{\max}^2 \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \lambda_{\max}^2 \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \lambda_{\max}^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|W^{-1}\| \leq \lambda_{\max}$.

Sei $v \in \mathcal{X}$ ein Eigenvektor von W^{-1} zum Eigenwert $\lambda_{\max}$. Dann ist

$$\|W^{-1}\|\|v\| \geq \|W^{-1}v\| = \|\lambda_{\max} v\| = \lambda_{\max}\|v\| \;\Rightarrow\; \|W^{-1}\| \geq \lambda_{\max}.$$

Damit ist $\|W^{-1}\| = \lambda_{\max}$ gezeigt.
Zurück zur eigentlichen Behauptung: Für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|L^\sharp x\|^2 &= \|L^*(LL^*)^{-1}x\|^2 = \|L^* W^{-1} x\|^2 = \langle L^* W^{-1}x, L^* W^{-1} x\rangle \\
&= \langle W W^{-1} x, W^{-1} x\rangle = \langle x, W^{-1}x\rangle \leq \|x\|\|W^{-1}x\| \\
&\leq \|x\|\|W^{-1}\|\|x\| = \|W^{-1}\|\|x\|^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|L^\sharp x\| \leq \|W^{-1}\|^{1/2}\|x\|$$
$$\Rightarrow \|L^\sharp\| \leq \|W^{-1}\|^{1/2}.$$

Sei nun $v \in \mathcal{X}$ ein Eigenvektor von W^{-1} zum Eigenwert $\lambda_{\max} = \|W^{-1}\|$. Dann ist

$$\|L^\sharp\|^2\|v\|^2 \geq \|L^\sharp v\|^2 = \langle v, W^{-1}v\rangle = \langle v, \lambda_{\max} v\rangle = \lambda_{\max}\langle v, v\angle = \|W^{-1}\|\|v\|^2$$
$$\Rightarrow \|L^\sharp\| \geq \|W^{-1}\|^{1/2}.$$

Damit ist die Behauptung $\|L^\sharp\| = \|W^{-1}\|^{1/2}$ gezeigt.

Aufgabe 4

Zur Bestimmung der Kalman-Zerlegung bestimmen wir den Spaltenraum der Kalman-Matrix,

$$\operatorname{ran}[B, AB, A^2B] = \operatorname{ran}B = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

dieser ist offenbar ein A-invarianter Unterraum (Cayley-Hamilton) mit Dimension 2. Wir ergänzen nun einen beliebigen dritten Basisvektor, z.B. $e_2 = (0,1,0)^\top$ und erhalten mit der Transformation

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

die Kalmann-Zerlegung

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, S^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 5

Die Eigenschaften (i) und (ii) der Laplace-Transformation folgen sofort aus der Definition. Die Eigenschaft (iii) kann beispielsweise mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Für $u \equiv 1$ und $u(t) = \sin(bt)$ ist ein kleinstmögliches α gegeben durch $\alpha = 0$. Für $u(t) = e^{\lambda t}$ durch $\alpha = \mathrm{Re}\lambda$.

Aufgabe 7

Wir nutzen den Satz aus der Vorlesung, nach dem für

$$V := \mathcal{K}(A,b) \begin{bmatrix} -a_2 & \dots & -a_n & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ -a_n & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{R}),$$

$V^{-1}AV$ und $V^{-1}b$ von der gewünschten Form sind. Hierbei sind $a_1, \dots, a_n$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. In unserem Fall ist $n = 4$ und wir erhalten mit MATLAB

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_2\lambda + a_1 = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Dies kann man nun in die obige Formel für V einsetzen.

Aufgabe 13

Wir können das System als single output System schreiben mit $c = e_i^\top$, falls wir den i-ten Spieler betrachten. Wir wollen das zeitdiskrete Hautus-Kriterium anwenden, d.h. das System ist beobachtbar, falls für alle $\lambda \notin \sigma(A)$ gilt

$$\ker \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ c \end{pmatrix} = \{0\}. \tag{3}$$

Die Systemmatrix ist eine zirkulante Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} (1-\alpha-\beta) & \alpha & 0 & \dots & \beta & \\ & & & & & \\ & \alpha & & 0 & \dots & \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren zirkulaten Matrizen sind gegeben durch

$$v_j = (\omega_j^k)_{k=0^{n-1}}$$

mit den komplexen Einheitswurzeln $\omega_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}}$. Durch betrachten der Vandermonde Determinante sieht man, dass die Eigenvektoren linear unabhängig sind und insbesondere verschieden von e_i. Um (3) nachzuweisen, müssen wir lediglich ausschließen, dass die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes von A größer als zwei ist. Hierzu bestimmen wir die Eigenwerte durch einsetzen der Eigenvektoren in die Eigenwertgleichung $Av_j = \lambda_j v_j$ und erhalten aus der ersten Zeile

$$\lambda_j = (1-\alpha-\beta) + \alpha\omega_j + \beta\omega_j^{n-1} = (1-\alpha-\beta) + \alpha\omega_j + \beta\omega_j^{-1}.$$

Wir müssen also zeigen, dass $\lambda_j \neq \lambda_l$ für $j \neq l$. Angenommen $\lambda_j = \lambda_l$, dann

$$(1-\alpha-\beta) + \alpha\omega_j + \beta\omega_j^{-1} = (1-\alpha-\beta) + \alpha\omega_l + \beta\omega_l^{-1}$$

und somit

$$\alpha\omega_j + \beta\omega_j^{-1} = \alpha\omega_l + \beta\omega_l^{-1}.$$

Wir nehmen nun an, dass $\alpha \neq \beta$, andernfalls ist die Geldverteilung zeitlich konstant. Umstellen der obigen Gleichung ergibt

$$\alpha(\omega_j - \omega_l) = \beta(\omega_l^{-1} - \omega_j^{-1}).$$

Damit ist offenbar entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, dann sind die Eigenwerte paarweise verschieden. Ist $\alpha = \beta = 0$ ist die Geldverteilung wiederzeitlich konstant. Sei also $\alpha, \beta \neq 0$ dann erhalten wir aus $\omega_l^{-1} = \overline{\omega_l}$ die Beziehung

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega_j - \omega_l}{-(\overline{\omega_j - \omega_l})}$$

Hieraus folgt $|\alpha/\beta| = 1$ und damit bereits $\alpha = \beta$ das hatten wir jedoch ausgeschlossen.

Aufgabe 16

Das System ist steuerbar, aber nicht beobachtbar, Die Transferfunktion ist gegeben durch $G(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2}$ (entweder mit MATLAB oder adjunkten Formel für die Inverse). Die Eigenwerte von A sind gegeben durch $\sigma(A) = \{-2,-3,-2\} \subseteq \mathring{\mathbb{C}}_-$, damit ist das System BIBO-stabil und auch "intern stabil". Asymptotisch stabil ist nur ein anderer Name für den Begriff intern stabil aus der Vorlesung. Die Laplacetransformierte des Ausgangs für $x(0) = 0$ und $u(t) = e^t$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(y)(s) = G(s)\mathcal{L}(u)(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

für alle $s \in \mathbb{C}_+$. Nach dem Faltungssatz und der Injektivität der Laplace-Transformation ist

$$y(t) = e^{-2t}t.$$

Damit konvergiert der Ausgang gegen Null für $t \to \infty$.

Mit Hilfe der Variation der Konstanten Formel kann man nachrechnen, dass der Zustant x für den gegebenen Eingang divergiert für $t \to \infty$.

Aufgabe 17

Nach kurzer Rechnung findet man $\sigma(A) \subseteq \{-1, -1\}$, sodass das System "intern stabil", was gleichbedeutend mit asymptotisch stabil ist. Dies ist äquivalent zur Existenz einer positiv definiten Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$A^T P + PA = -I_2.$$

Die Lösung der Lyapunov-Gleichung ist tatsächlich eindeutig und kann hier direkt mit dem Ansatz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ durch einsetzen und Eintragsweise betrachten der Matrixgleichung zeigen, dass

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & \\ 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18

Gegeben sei das System $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ mit der Rückführung $u(t) = [N - M]B^T Kx(t)$,
wobei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ und

$$M \geq 0, \quad N^T = -N, \quad K > 0 \text{ und } K = K^T : \ A^T K + KA < 0.$$

Wir setzen die Rückführung $\dot{x} = Ax + Bu(t) = Ax + B[N - M]B^T Kx = (A + B[N - M]B^T K)x$ ein und benutzen dann das Theorem 8.4, um unsere Lösung $x(t)$ abschätzen zu können und somit die asymptotische Stabilität des Systems nachzuweisen.

Wir benutzen die Funktion $V(x) = x^T Kx$, womit die Bedingung $\exists \alpha, \beta \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \alpha\|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta\|x\|^2$ erfüllt ist. Es bleibt noch zu zeigen: $\exists \gamma > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \nabla V(x) \cdot f(x) \leq -\gamma\|x\|^2$. Für $\nabla V(x)$ gilt:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{d}{dt}(x^T Kx) = \dot{x}^T Kx + x^T K\dot{x} = x^T K^T \dot{x} + x^T K\dot{x} = x^T(K^T + K)\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \partial V(x(t)) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot \dot{x}$$
$$\Rightarrow \nabla V(x) = x^T(K^T + K).$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
&\nabla V(x) \cdot f(x) = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = x^T K^T \dot{x} + x^T K \dot{x} = x^T K^T \dot{x} + \dot{x}^T K x \\
&= x^T K[A + BNB^T K - BMB^T K]x + \left([A + BNB^T K - BMB^T K]x\right)^T K x \\
&\overset{(\star)}{=} x^T [KA + KBNB^T K - KBMB^T K]x + x^T [A^T K + K^T BN^T B^T K - K^T BM^T B^T K]x \\
&= x^T [A^T K + KA - KB(M + M^T)B^T K]x \\
&= x^T \underbrace{[A^T K + KA]}_{\text{laut Vor. } <0} x - \underbrace{(B^T Kx)^T [M + M^T] B^T Kx}_{\geq 0, \text{ da } M, M^T \text{ pos. semidef.}} \\
&\leq -\gamma \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

$(\star)$: $N^T = -N$ und K symmetrisch.

Dann folgt aus dem Satz zur Charakterisierung der asymptotischen Stabilität, dass für jede Lösung $x(\cdot)$ die Abschätzung $\|x(t)\| \leq (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2\beta}t} \|x^0\| \; \forall t \geq 0$ gelten muss und das System somit asymptotisch stabil ist.

Man kann sich natürlich Fragen, wieso ein bereits stabiles System stabilisiert werden muss. Falls man jedoch z.B. das stabile System aus Linearisierung eines nicht-linearen Systems erhalten hat, dann wird durch eine zusätzliche Zustandsrückführung das Systemverhalten robuster (weniger anfällig für Störungen) oder der Einzugsbereich um ein Gleichgewicht kann vergrößert werden.

Aufgabe 20

Voraussetzung: Wir betrachten das lineare System

$$
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ z(t) \end{bmatrix}
$$

mit $\gamma > 0$, $A_1 \in \mathbb{R}$, $A_2, A_3^T \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und $\sigma(A_4) \subset \mathbb{C}_-$.

Behauptung: Für $k > \frac{A_1 + 2\|A_3^T P + A_2\|^2 - \frac{3}{8}}{\gamma}$ und $u(t) = -ky(t)$ ist das System asymptotisch stabil.

Beweis: Mit der Rückführung aus der Behauptung hat das System folgende Form:

$$
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - \gamma k & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ z(t) \end{bmatrix}
$$

Da A_4 asymptotisch stabil ist, ein positiv definites $P = P^T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, welches die Lyapunov-Gleichung $A_4^T P + PA_4 = -I_{n-1}$ erfüllt. Nun setzen wir

$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (\xi, z) \mapsto \xi^2 + z^T P z$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(\xi(t), z(t)) &= 2\xi\dot{\xi} + \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} \\
&= 2\xi((A_1 - \gamma k)\xi + A_2 z) + (A_3\xi + A_4 z)^T P z + z^T P(A_3\xi + A_4 z) \\
&= 2(A_1 - \gamma k)\xi^2 + 2\xi A_2 z + \xi A_3^T P z + z^T P A_3 \xi + z^T(A_4^T P + P A_4)z \\
&= 2(A_1 - \gamma k)\xi^2 + 2\xi A_2 z + 2\xi A_3^T P z - \|z\|^2 \\
&\overset{(\star)}{\le} -\frac{3}{4}\|\xi\|^2 - 4(\|A_3^T P + A_2\|^2)\xi^2 + 2\|A_3^T P + A_2\||\xi|\|z\| - \frac{1}{4}\|z\|^2 - \frac{3}{4}\|z\|^2 \\
&\le -\frac{3}{4}\|\xi\|^2 - (2\|A_3^T P + A_2\|\xi - \frac{1}{2}\|z\|)^2 - \frac{3}{4}\|z\|^2 \\
&\le -\frac{3}{4}\|(\xi, z)\|^2
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung nach Theorem 8.4.

Statt $(\star)$ ergibt sich durch $M := 2\|A_2\| + 2\|A_3\|\|P\|$ und $\frac{1}{\varepsilon} ab\varepsilon \le (\frac{a}{\varepsilon})^2 + (\varepsilon b)^2$:

$$
\begin{aligned}
2(A_1 - \gamma k)\xi^2 + 2\xi A_2 z + 2\xi A_3^T P z - \|z\|^2 &\le 2(A_1 - \gamma k)|\xi|^2 + M|\xi|\|z\| - \|z\|^2 \\
&\le 2(A_1 - \gamma k)|\xi|^2 + (2M|\xi|)^2 + (\frac{1}{2}\|z\|)^2 - \|z\|^2 \\
&\le 2(A_1 - \gamma k + 2M^2)|\xi|^2 - \frac{3}{4}\|z\|^2.
\end{aligned}
$$

Hier sieht man nun, dass man zum Beispiel $k^* = \frac{1}{\gamma}(|A_1| + 2M^2 + 1)$ wählen kann:

$$
2(A_1 - \gamma k + 2M^2)|\xi|^2 - \frac{3}{4}\|z\|^2 \le -2|\xi|^2 - \frac{3}{4}\|z\|^2 \le -\frac{3}{4}\|(\xi(t), z(t))\|.
$$

Aufgabe 21

Voraussetzung: Das System

$$
\dot{x} = Ax + bu(t),
$$

$(A, b) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n$ steuerbar, $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_0 \in \mathbb{R}[s]$ monisch mit $\deg p(s) = n$.

Behauptung: Die Zustandsrückführung

$$
u(t) := -fx(t) := -[0, \ldots, 0, 1][b, Ab, \ldots, A^{n-1}b]^{-1} p(A)x(t)
$$

bewirkt die Beziehung

$$
\det(sI_n - (A - bf)) = p(s).
$$

Beweis: Sei $V := \mathcal{K}(A, b) \begin{bmatrix} -a_2 & \ldots & -a_n & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ -a_n & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann gilt nach dem Satz über Transformation auf Begleitmatrixform

$$
\begin{aligned}
V^{-1}AV &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \\
V^{-1}bfV &= V^{-1}b\,[0,\dots,0,1]\mathcal{K}(A,b)^{-1}p(A)V \\
&\overset{4.3}{=} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \mathcal{K}(A,b)^{-1}p(A)V \\
&\underset{(\star\star)}{\overset{4.3}{=}} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \mathcal{K}(A,b)^{-1}V p(\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \mathcal{K}(A,b)^{-1}\mathcal{K}(A,b) \begin{bmatrix} -a_2 & \dots & -a_n & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ -a_n & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} p(\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & \\ & 0 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \left(p_0 I_n + p_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}^n \right) \\
&= \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & \\ & 0 & & \\ p_0 & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & \\ & 0 & & \\ 0 & p_1 & & \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & \\ & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & \\ & 0 & & \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & \\ & 0 & & \\ a_1+p_0 & \cdots & \cdots & a_n+p_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$\det(sI_n - (A - bf)) = \det(sI_n - V^{-1}(A - bf)V) = \det(sI_n - (V^{-1}AV - V^{-1}bfV))$$

$$= \det\left(sI_n - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 - (a_1 + p_0) & \cdots & \cdots & a_n - (a_n + p_{n-1}) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(sI_n - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -p_0 & \cdots & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}\right)$$

$$\overset{4.3}{=} p_0 + p_1 s + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n = p(s).$$

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 22

(a) mit $V = \begin{pmatrix} -\sqrt{9/10} & -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{1/8} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ erhalten wir $V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $V^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Damit ist das System nicht stabil. Der Rang der Kalman-Matrix ist 1 damit ist das System auch nicht steuerbar, allerdings ist das System stabilisierbar. Eine Möglichkeit um das System zu stabilisieren ist es den positiven Eigenwert der Matrix A nach -1 zu verschieben. Dies erreicht man durch das Feedback $fV = (0, 1)$, denn es gilt

$$V^{-1}(A - Bf)V = V^{-1}AV - V^{-1}B(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

damit ist $A - Bf$ stabil.

(b) Die Matrix A geht aus der Matrix in (a) hervor durch Zeilentausch, damit erhalten wir durch Zeilentausch in V aus (a) eine entsprechende Transformationsmatrix für A aus (b). Wie in (a) ist das System nicht stabil mit zwei Eigenwerten bei $\lambda = 1$, nicht steuerbar und auch nicht stabilisierbar.

(c) Die Matrix A stimmt mit der Matrix A aus (b) überein, sodass das System instabil ist. Aus der Invertierbarkeit von B folgt die Steuerbarkeit des Systems, weil bereits die erste Blockspalte der Kalmanmatrix vollen Zeilenrang hat. Nach einem Satz über Polplatzierung können durch Zustandsrückführung die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises beliebig vorgegeben werden. Wir wählen nun F wie in (a) durch den Ansatz

$$V^{-1}BFV = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

aufgrund der invertierbarkeit von V und B erhalten wir

$$F = ...$$

Falls B nicht invertierbar ist, was vermutlich in den meisten Anwendungen der Fall ist, und wir auch kein single input System haben (wo man ja die Ackermann-Formel anwenden könnte), so kann single-input systeme durch eine feste linear Kombinationen der Spalten erhalten und somit die