Lösungen Mathe 2 für Physiker

May 7, 2019

Serie 14 Aufgabe 6

b) Anders als in der Übung wenden wir hier direkt die Binomische Ungleichung

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

welche für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Damit erhalten wir die Abschätzungen

$$0 \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

für $x, y \geq 0$ (da wir nur den Limes $x, y \to \infty$ betrachten ist das ausreichend) Damit erhalten wir für alle $x, y \geq 0$

$$\frac{x+y}{x^2+y^2-0} \leq \frac{x+y}{x^2+y^2-xy} \leq \frac{x+y}{x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 2\frac{x+y}{x^2+y^2}. \quad (1)$$

Bilden wir nun von den Ausdrücken in (1) den Limes für $x, y \to \infty$, dann bleiben die Ungleichungszeichen erhalten und nach dem Sandwichlemma (Einschließung einer Folge durch zwei konvergente Folgen mit selbem Grenzwert) die Konvergenz der Folge in der Mitte. Wir müssen also nur noch nachweisen, dass

$$\lim_{x,y\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0 \quad (2)$$

gilt, womit auch der Grenzwert des Ausdrucks rechts in (1) gleich 0 ist. Offenbar ist für $x > 0$ auch

$$0 \leq \frac{x}{x^2+y^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

und damit wieder nach Sandwichlemma

$$0 \leq \lim_{x,y\to\infty} \frac{x}{x^2+y^2} \leq \lim_{x,y\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Analog sieht man $\lim_{x,y\to\infty} \frac{y}{x^2+y^2} = 0$ und für die Summe dieser konvergenten Folgen gilt somit wie behauptet (2).

Die binomische Ungl. folgt sofort aus der 2. Binomischen Formel $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \geq 0$

(j) Hier betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin(1/x)\sin(1/y). \tag{3}$$

Offenbar gilt für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Abschätzung

$$0 \le |(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)| \le |x+y| \tag{4}$$

da man den Betrag auf die einzelnen Faktoren ziehen darf (Multiplikativität) und der Betrag des Sinus durch 1 nach oben beschränkt ist. Betrachtet man den Grenzwert $(x,y) \to (0,0)$, dann heißt das $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ sodass insbesondere $x \to 0$ und $y \to 0$ und damit $x+y \to 0$ gilt. Nach der Ungleichung (4) und dem Sandwichlemma existiert der Grenzwert (3) und ist gleich den Grenzwerten der einschließenden Folgen, also gleich 0.

Interessant ist, dass obwohl der Grenzwert (3) existiert, die beiden iterierten Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y), \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$$

nicht existieren, weil für ein festgehaltenes x (analog y) der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ nicht existiert (vgl. irgendeine Übungsaufgabe).

Serie 15 Aufgabe 1

(a) Die Funktion ist als Quotient stetiger Funktionen wieder stetig. Das die Funktion nicht gleichmäßig stetig ist sieht man per Widerspruchsbeweis.

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $x \to x^2$ auf $\mathbb{R}$ stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist. Da Lipschitz stetige Funktionen auch gleichmäßig stetig sind, kann die Funktion auch nicht Lipschitz stetig sein.

(c) Die Wurzelfunktion ist stetig und daher auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ auch gleichmäßig stetig nach einem Satz aus der Vorlesung.

(d) Wir nehmen zunächst an, dass die Exponentialfunktion e^x stetig ist. Dann sind auch die Verkettungen stetiger Funtionen $x \mapsto ix$ (Multiplikation mit Konstanten), $ix \mapsto e^{ix}$ sowie $e^{ix} \mapsto \mathrm{Re}(e^{ix})$ (Projektion auf die Koordinatenachse) stetig (vgl. Aufgabe 1 Serie 14).

Wur begründen kurz die Stetigkeit der Exponentialfunktion. Wir untersuchen zunächst die Stetigkeit im Nullpunkt und müssen zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0} e^h = 1.$$

Hierzu verwenden wir die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$0 \le |e^h - 1| = |\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!} - 1| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!} = h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!} \le h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = he^h$$

Bildet man den Limes für $h \to 0$ auf beiden Seiten der Ungleichung

$$0 \leq \lim_{h\to} |e^h - 1| \leq \lim_{h\to 0} he^h = 0$$

wobei der rechte Grenzwert 0 ist, da e^h nahe 0 beschränkt ist.

Serie 16 Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wobei wir $f(0,0) := 1$ setzen, womit die Funktion nach l'Hospital zumindest stetig ist, vgl. Serie 17 Aufgabe 3 (c).

(a) Die Gleichung der Tangentalebene an der Stelle (x_0, y_0) ergibt sich aus dem Taylorpolynom erster Ordnung wiefolgt

$$z = T_1 f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0, y - y_0)\nabla f(x_0,y_0). \tag{5}$$

Dies ist in den unbestimmten x, y, z eine Ebenengleichung in Koordinatenform. Der Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (\pi, 0, 0)$ ist laut Aufgabenstellung gegeben. Daher müssen wir nur noch $\nabla f(\pi, 0)$ bestimmen. Hierzu berechnen wir die partiellen Ableitungen von f (bekannt aus Aufgabe 5 (b), Serie 15) für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} - \frac{x\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}^{3/2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} - \frac{y\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Für $(x,y) = (\pi, 0)$ erhalten wir also

$$\nabla f(\pi,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir das in die Ebenengleichung (5) erhalten wir

$$z = f(x_0,y_0) + (x - x_0, y - y_0)\nabla f(x_0,y_0) = 0 + (x - \pi, y - 0)\begin{pmatrix} -1/\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$z - \frac{x}{\pi} - 1 = 0.$$

Was für einen Gradienten und welche Tangentialebene würde man anschaulich für den Mexikanischen Hut bei $(x_0, y_0) = 0$ erwarten?

(b) Die Taylorentwicklung 2.ter Ordnung bzw. quadratische Taylorfunktion am Entwicklungspunkt (x_0, y_0) ist per Definition gegeben durch (vgl. Abschnitt 4.1.3)

$$T_2 f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0, y-y_0)\nabla f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0) H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

mit der Hessematrix

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Für die quadratische Taylorentwicklung in $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ können wir die ersten partiellen Ableitungen aus Teil (a) benutzen, um die Hessematrix in $(\pi, 0)$ zu berechnen. Es gilt

$$H_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -2/\pi^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zum Ausrechnen ist die Symmetrie der Hessematrix hilfreich, da nur ein Nebendiagonaleintrag berechnet werden muss!

Damit lautet das quadratische Taylorpolynom in $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ also

$$T_2 f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0, y-y_0)\nabla f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0) H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= 0 + (x-\pi)\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{2}(-2/\pi^2(x-\pi)^2 - y^2) \tag{7}$$

Analog kann man die Hessematrix bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ bestimmen. Hierzu muss man zunächst noch ausrechnen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Serie 16 Aufgabe 6

(a) Es folgt aus der Definition der Richtungsableitung oder aus der Kettenregel, dass

$$D_u f(a) = \frac{< \nabla f(a), u >}{\|u\|} \overset{\nabla f(a)=u}{=} \frac{\|\nabla f(a)\|^2}{\|\nabla f(a)\|} = \|\nabla f(a)\| > 0.$$

(b) Wir nehmen an, dass a ein lokales Extremum ist, sagen wir ein Maximum (analog für ein Minimum), dann gilt in einer Umgebung

$$f(a+x) \leq f(a), \quad \text{für alle } x \in U_\varepsilon(a). \tag{8}$$

Wir betrachten nun die rechts- und linksseitige Richtungsableitung in der Richtung $u = \nabla f(a)$ und erhalten mit (8)

beachte, dass bei $h \downarrow 0$ auch $h > 0$ gilt!

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a + h\nabla f(a)) - f(a)}{h} \leq 0.$$

Genauso erhält man für die linkseitige Richtungsableitung

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(a + h\nabla f(a)) - f(a)}{h} \geq 0$$

Wir nutzen hier, dass für hinreichend kleines h gilt $h\nabla f(a) \in U_\varepsilon(a)$. Da die Funktion f differenzierbar ist, mussen die rechts und linksseitigen Ableitungen übereinstimmen (und auch gleich der Richtungsableitung sein). Daher muss diese Richtungsableitung gleich null sein

$$0 = D_{\nabla f(a)} f(a) \stackrel{(a)}{=} \|\nabla f(a)\| \neq 0.$$

Wir erhalten also mit Aufgabenteil (a) einen Widerspruch.

(c) Nach Cauchy-Schwarz gilt für alle $u \in \mathbb{R}^n$

$$| < \nabla f(a), u > | \leq \|\nabla f(a)\| \|u\|,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt wenn u und $\nabla f(a)$ linear abhängig sind. Teilt man in der Cauchy-Schwarz Ungleichung durch $\|u\|$ erhalten wir genau die Richtungsableitung

$$|D_u f(a)| = \left| \frac{< \nabla f(a), u >}{\|u\|} \right| \leq \|\nabla f(a)\|.$$

Daher ist der Betrag der Richtungsableitung genau dann maximal, wenn die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist, das heißt Gleichheit in der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt. Es folgt daher $u = \alpha \nabla f(a)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, da für $\alpha \leq 0$ die Richtungsableitung nach (a) aber nichtnegativ ist, muss $\alpha > 0$ gelten.

Serie 16 Aufgabe 7

(Die Aufgabe ist dem Analysis 2 Buch von Behrends entnommen)
Der Gradient der Temperaturfunktion $T(x, y)$ in (x_0, y_0) zeigt nach Aufgabe 6 in die Richtung des stärksten Anstieges. Somit ist die gesuchte Richtung des stärksten Abfalls der negative Gradient (man betrachte z.B. die Gradienten von $-T(x, y)$). Wir bestimmen zunächst allgemein

$$\nabla T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} T(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} T(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich für die gesuchte Richtung in $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$$-\nabla T(1,2) = (4,1)^\top.$$

Problem hierbei ist natürlich, dass man die Temperaturverteilung explizit in Form einer analytischen Funktion kennen muss!

Serie 17 Aufgabe 1

(a) Wir berechnen zunächst für die Taylorreihe die Ableitungen von $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Setzen wir dies für $x_0 = 0$ in die Taylorreihe ein erhalten wir

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

wobei wir $f(0) = \ln(1+0) = 0$ ausgenutzt haben. Für welche x konvergiert die obige Potenzreihe und was ist ihr Konvergenzradius?

Das Problem ist nun aber, dass wir nicht wissen ob die Taylorreihe tatsächlich mit der Funktion übereinstimmt, es gibt Beispiele, wo dies nicht der Fall ist, etwa bei $f(x) := e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$, wenn man die Taylorreihe bei $x = 0$ berechnet.

Wir setzen voraus, dass das bekannt ist (zum Beweis benötigen wir ein wenig Integralrechung), das heißt es gilt $Tf(x) = \ln(1+x)$. Hieraus erhalten wir die Reihendarstellung

$$\ln(1+1) = Tf(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Wir konnten also sehr leicht den Grenzwert der alternierenden hermonischen Reihe bestimmen!

(b) Wir machen eine Taylorapproximation als Ansatz und bezeichnen die gesuchte rationale Zahl mit q und nicht mit x wie in der Aufgabenstellung. Da $1/e =^{-1}$ wählen wir die Taylorapproximation der Exponentialfunktion entwickelt in $x_0 = 0$ und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{=R_n(x)}.$$

Die Idee ist hier mit dem Restglied $R_n(x)$ zu arbeiten um den Approxi- Problem: Zwischenstelle $\xi \in [-1, 0]$ ist nicht bekannt!

mationsfehler im Punkt $x = -1$ abzuschätzen. Wir definieren uns also die gesuchte rationale Zahl q als

$$q := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

wobei wir das n später so wählen wollen, dass das Restglied so klein ist, dass die vorgegebene Genauigkeit von 10^{-2} erreicht wird.

Wie groß muss n also gewählt werden? Hierzu schätzen wir das Restglied ab, es gilt

$$|q - e^{-1}| = \left| q - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}(-1-0)^{n+1} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}(-1)^{n+1} \right| = \left| \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!} \right|$$

Da die Zwischenstelle ξ jedoch nicht bekannt ist müssen wir in der Regel Monotonieeigenschaften der Funktionen $f^{(n+1)}(\xi)$ im Restglied ausnutzen! Wir berechnen zunächst die Ableitungen

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^x|_{x=\xi} = e^\xi.$$

Die Zwischenstelle $\xi \in [-1, 0]$ ist zwar unbekannt, jedoch können wir nun die Monotonie der Exponentialfunktion ausnutzen, es gilt nämlich $|e^\xi| \leq e^0 = 1$ für alle $\xi \in [-1, 0]$. Damit folgt

$$\left| \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \overset{!}{<} 10^{-2}$$

Für n=4 gilt offenbar $(4+1)! = 1*2*3*4*5 = 120 > 100$ und die obige Ungleichung ist erfüllt, sodass wir ein mögliches n für unser q gefunden haben. Damit ist

$$q = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} = 1/2 - 1/6 + 1/24 = 0.375$$

die gesuchte rationale Approximation für $1/e \approx 0.3679$.

1 Serie 18 Aufgabe 2

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + 5y$. Hierzu bestimmen wir die Nullstellen des Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 1 \\ 2y + x + 5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0.$$

Wir müssen also ein lineares Gleichungssystem lösen. Mit dem Einsetzungsverfahren erhalten wir als eindeutige Lösung $y = -3$ und $x = 1$. Diese Lösung muss aber nicht unbedingt ein lokales Extremum sein, daher überprüfende wir die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, s.h. wir betrachten die Hessematrix H_f an der verdächtigen Stelle $(x, y) = (1, -3)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Hessematrix konstant. Wir berechnen die Hauptminoren der Hessematrix

$$\det(2) > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

und da diese positiv sind ist nach dem Hauptminorenkriterium die Hessematrix positive definit. Damit verhält sich die Funktion f in der Nähe von $(1, -3)$ wie ein nach oben geöffneter Paraboloid (Tasse), sodass $(1, -3)$ ein lokales Minimum darstellt.

Für die Funktion $g(x, y) = e^{-x^2}(4y + x^2 - y^2)$ berechnen wir

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -2e^{-x^2} x(4y + x^2 - y^2 - 1) \\ e^{-x^2}(4 - 2y) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2}(4x^2(x^2 - y^2 + 4y) - 2(x^2 - y^2 + 4y) - 8x^2 + 2) & -2e^{-x^2} x(4 - 2y) \\ -2e^{-x^2} x(4 - 2y) & -2e^{-x^2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Setzen wir den Gradienten gleich 0 können wir den positiven Faktor e^{-x^2} rausteilen sodass wir

$$-2x(4y + x^2 - y^2 - 1) = 0, \quad 4 - 2y = 0$$

erhalten. Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 2$ und somit lautet die erste Gleichung

$$-2x(8 + x^2 - 2^2 - 1) = 0.$$

Die Lösungen sind durch $x = 0$ und $8 + x^2 - 5 = 0$, d.h. nur $x = 0$ gegeben. Somit lautet die Extremwertverdächtige Stelle $(x, y) = (0, 2)$. An dieser Stelle ist die Hessematrix gegeben durch

$$H_g(0,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit, sodass $(0, 2)$ ein lokales Maximum bildet.

Serie 18 Aufgabe 3

In dieser Aufgabe sollen Extrema für Funktionen mit Nebenbedingungen untersucht werden.

(a) Wir stellen zuerst die Lagrangefunktion auf

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-1), \quad g(x,y) := x^2+y^2-1$$

wobei zur gegebenen Funktion die Funktion g aus der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ mit Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ addiert wird. Nun bestimmen wir klassisch die lokalen Extrema der Lagrangefunktion durch Ableiten (auch nach dem Parameter λ !)

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x+2\lambda x \\ -2y+2\lambda y \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Offenbar erhält man in der letzten Zeile immer das die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ erfüllt sein muss! Wir lösen nun dieses nichtlineare Gleichungssystem auf, indem wir geschickt ausklammern

$$2x+2\lambda x = 2x(1+\lambda) = 0 \tag{11}$$
$$-2y+2\lambda y = 2y(-1+\lambda) = 0 \tag{12}$$
$$x^2+y^2 = 1. \tag{13}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Ist $\lambda = -1$ so folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$ und daher aus der dritten Gleichung $x = \pm 1$. Analog findet man für $\lambda = 1$, dass die zweite Gleichung erfüllt ist. Aus der ersten Gleichung erhält man $x = 0$ und somit mit der dritten Gleichung wieder $y = \pm 1$.

Ist $\lambda \neq 1, -1$, dann folgt aus den ersten beiden Gleichungen $x = y = 0$, was aber im Widerspruch zur dritten Gleichung steht.

Wir erhalten also die vier verdächtigen Punkte $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Wir überprüfen wir nun, ob diese auch lokale Extrema sind? Hierzu können wir die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ in die Zielfunktion einsetzen und erhalten

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = 1 - 2y^2.$$

für $y \in [-1,1]$ (dieser Bereich für y ergibt sich aus der Nebenbedingung). Die Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, sodass offenbar $y = 0$ ein globales Maximum und $y = \pm 1$ ein globales Minimum ist. Indem wir einfach nach den Extrema der Funktion $F(y) = 1 - 2y^2$ auf $[-1,1]$ suchen. Wir erhalten sofort die notwendige Bedingug

$$F'(y) = -4y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0.$$

und wegen $F''(y) = -4$ ist $y = 0$ ein lokales Maximum und weil die Funktion eine nach unten geöffnete Parabel ist sogar ein globales Maximum. Die globalen Minima bei $y = \pm 1$ erhalten wir, weil die Funktion auf $[0,1]$ streng monoton fallend ist und auf $[-1,0]$ streng monoton wachsend. Wir können mit dieser Methode diese Aufgabe sogar ganz ohne Lagrangemultiplikatoren lösen!