Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 14: Stetigkeit

Aufgabe 1 Beweisen Sie den Satz aus Kapitel III, Abschnitt (2.5.2) über die Komposition $h = g \circ f$ von Abbildungen $f : D \subseteq V \to W$ und $g : D' \subseteq W \to X$ mit $f(D) \subseteq D'$ in normierten Räumen $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ $(X, \|\cdot\|_X)$.

Aufgabe 2 Wir betrachten lineare Abbildungen zwischen den Standardräumen $\mathbb{E}^n$ und $\mathbb{E}^m$ mit $n, m \geq 1$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, so ist f stetig auf $\mathbb{R}^n$ (Verwenden Sie (2.5.4), Bspl. 2 und (2.5.5) aus Kapitel III).

(b) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $g(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|$, so ist g stetig auf $\mathbb{R}^n$ (Verwenden Sie (2.5.4), Bspl. 3 und (2.5.5) aus Kapitel III).

(c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{(m.n)}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei die lineare Abbildung mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = 0.$$

Beweisen Sie, dass $A = O$ die Nullmatrix ist.

Aufgabe 3 Es sei $I = [0, T] \subseteq \mathbb{R}$ mit $T > 0$ und es sei $\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung mit $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))^T$ für alle $t \in I$. Lösen Sie folgende Aufgaben:

(a) Begründen Sie, dass $\vec{r}$ stetig auf I ist und somit ein Weg in $\mathbb{E}^2$ ist (Verwenden Sie (2.5.5) und (2.8) aus Kapitel III).

(b) Skizzieren Sie die zu $\vec{r}$ gehörende Kurve $\Gamma = \{\vec{r}(t) \mid t \in I\}$ für $T \in \{\pi, 2\pi, 3\pi\}$. Geben Sie jeweils die Anfangs- und Endpunkte sowie die Doppelpunkte von Γ an.

Aufgabe 4 Im Standardraum $\mathbb{E}^2$ sei Γ die Ellipse mit

$$\Gamma = \{\vec{x} = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass Γ eine Kurve in $\mathbb{E}^2$ ist und geben Sie eine Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{r}(t)$ für Γ an.

Aufgabe 5 Im Standardraum $\mathbb{E}^2$ sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung mit

$$f(\varphi, r) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$$

für alle $(\varphi, r) \in \mathbb{R}^2$. Lösen Sie folgende Aufgaben:

(a) Begründen Sie, dass f stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist (verwenden Sie (2.5.3), (2.5.5) und (2.8) aus Kapitel III).

(b) Von den folgenden Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ prüfe man ob D abgeschlossen und beschränkt ist. Weiterhin skizziere man $D' = f(D)$ in $\mathbb{E}^2$ und entscheide, ob f injektiv auf D ist.

1. $D = [0, 2\pi) \times \{3\}$
2. $D = [0, 2\pi] \times \{3\}$
3. $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$
4. $D = [0, 4\pi] \times [0, 1]$
5. $D = [0, \pi/2] \times [0, 1]$
6. $D = [0, 2\pi] \times [2, 3]$

Aufgabe 6 Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren).

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,,$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}\,,$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}\,,$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{x - y}{x + y}\,,$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}\,,$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to a} \frac{\sin(xy)}{x}\,,$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\,,$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to 0} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}\,,$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 1,\, y\to 0} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ j) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, y\to 0} (x + y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y}\,,$

Zur Übung am 12.04.2019, 11.00 Uhr, C 108

sind die Aufgabe 5 sowie Serie 13 Aufgabe 4 b), c) sowie Aufgabe 5 c) als Hausaufgaben abzugeben.
