Inst. für Mathematik
Achim Ilchmann
Hannes Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Wintersemester 2019/20

Systemtheorie 1

Serie 1: Steuerbarkeit

Aufgabe 1
Es sei $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ steuerbar. Man wähle $K_0,\dots,K_{n-1} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $\sum\limits_{i=0}^{n-1} A^i\, B\, K_i = I_n$. (Warum ist dies möglich?)

Es sei $\varphi \in C^{n-1}([0,T] \to \mathbb{R})$ mit

$$\int_0^T \varphi(s)\,\mathrm{d}s = 1, \qquad \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(T) = 0 \quad \text{für} \quad k \in \{0,\dots,n-1\}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Steuerfunktion

$$s \mapsto u(s) = \sum_{i=0}^{n-1} K_i\, \left[e^{A(s-T)}\, \left(x^1 - e^{AT}\, x^0\right)\, \varphi(s)\right]^{(i)}$$

den Zustand $x(0) = x^0$ in der Zeit T in den Zustand $x(T) = x^1$ überführt.

Aufgabe 2
Es seien Ω und $\mathcal{X}$ Hilberträume mit den Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathcal{X}$, und

$$L\ :\ \Omega \to \mathcal{X}$$

eine stetige lineare Abbildung. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass der *adjungierte Operator*

$$L^*\ :\ \mathcal{X} \to \Omega \quad \text{gegeben ist durch} \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\ \forall\, \omega \in \Omega\ :\ \langle L\omega, x\rangle_\mathcal{X} = \langle \omega, L^* x\rangle_\Omega\,,$$

und es sei

$$W\ :\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad W := LL^*\,.$$

Im Folgenden sei $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ oder $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$.
Zeigen Sie:

1. $\mathrm{im} L = (\ker L^*)^\perp = \mathrm{im} LL^*$.
2. Der Operator W ist selbstadjungiert, d.h. $W^* = W$, und positiv semidefinit.
3. Äquivalent sind die Aussagen:
   (a) L^* ist injektiv.
   (b) L ist surjektiv.
   (c) W ist surjektiv.

(d) $\det W \neq 0$.

(e) W ist positiv definit.

4. Für surjektives L erfüllt die *verallgemeinerte Inverse*

$$L^\sharp \;:\; \mathcal{X} \to \Omega\,, \qquad x \mapsto L^*(LL^*)^{-1}x$$

die Eigenschaften:

(α) $\forall\, x \in \mathcal{X} \;:\; L(L^\sharp x) = x$.

(β) $\forall\, \omega \in \Omega \quad \text{mit} \quad L\omega = x \;\text{ und }\; \omega \neq L^\sharp x \;:\; \|L^\sharp x\| < \|\omega\|$.

(γ) $\|L^\sharp\| = \|(W^{-1})^{1/2}\|$.

Aufgabe 3

Es seien $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ und $T > 0$. Im Folgenden betrachten wir bei der Untersuchung der Steuerbarkeit abweichend von der Definition in der Vorlesung nur Steuerungen $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0, T], \mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. (A, B) ist erreichbar von 0 auf $[0, T]$.

2. Der Operator

$$L \;:\; L^2_{\mathrm{loc}}([0,T], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n, \qquad \omega \mapsto \int_0^T e^{A(T-\tau)} B\omega(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

ist surjektiv.

3. $W(0, T) := \int_0^T e^{A(T-\tau)} BB^\top e^{A^\top(T-\tau)}\, \mathrm{d}\tau$ ist positiv definit.

Zeigen Sie weiterhin für steuerbares (A, B):

4. Für alle $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ ist die Steuerfunktion

$$u(t) = B^\top e^{A^\top(T-t)} W(0,T)^{-1}[x^1 - e^{AT}x^0], \qquad t \in [0, T]$$

eindeutig in dem Sinne, dass sie $\|u(\cdot)\|_2$ minimiert unter allen Steuerungen mit $x(T; 0, x^0, u(\cdot)) = x^1$.

Aufgabe 4

Gegeben sei das System (A, B) mit

$$A := \begin{bmatrix} 7 & -12 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \; B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Transformation $S \in GL_3(\mathbb{R})$, sodass gilt:

$$(S^{-1}AS, S^{-1}B) = \left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

wobei (A_1, B_1) steuerbar ist.

Die Aufgaben werden in der Übung **am 30.10.2019, 17 Uhr, C 112** besprochen.
