Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 15: Ableitungen

Aufgabe 1 (a) Zeige, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(0, 1)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeige, dass die Funktion $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}$ stetig, aber nicht Lipschitz stetig ist.

(c) Zeige das die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz stetig ist.

(d) Zeige anhand der Definition der Funktionen $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$, $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ ihre Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Überlege Dir hierfür zunächst die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Aufgabe 2 (a) Bestimme mit Hilfe der Ableitungsregeln für Potenzreihen die Ableitungen der Sinus- und Cosinusfunktion.

(b) Mit Hilfe der Quotientenregel bestimme man die Ableitung von $\tan(x)$ sowie $\cot(x)$.

(c) Es sei $g : I' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit mit $I' = (-1, 1)$ und $g(x) = \arcsin(x)$ die Umkehrfunktion der Sinusfunktion auf dem Intervall $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Begründen Sie, dass g stetig differenzierbar auf I' ist und geben Sie die Ableitung $g'(x)$ für $x \in I'$ an

(d) Für die Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}\cos(e^{2x})$ und $I = (0, \infty)$ bestimme man die Ableitungen $f'(x)$ sowie $f''(x)$ für $x \in I$. Ist f stetig diffbar auf I?

Aufgabe 3 (a) Für welche x ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ differenzierbar?

(b) Für welche x ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|x$ differenzierbar? Ist f stetig differenzierbar auf $I = \mathbb{R}$. Für welche x existiert $f''(x)$. Ist $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Aufgabe 4 Es sei $I = [0, 3\pi] \subseteq \mathbb{R}$ mit und es sei $\vec{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung einer Helix (Schraubenlinie) mit

$$\vec{r}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 3t + 1)^T$$

für alle $t \in I$.

(a) Bestimmen Sie $\vec{r}'(t)$ für alle $t \in I$.

(b) Bestimmen Sie $\vec{r}''(t)$ für alle $t \in I$.

(c) Wie oft ist $\vec{r}$ auf I stetig differenzierbar.

(d) Es sei $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$ mit $t \in \mathbb{R}$ die Tangente an der Helix im Punkte $\vec{r}(\pi/2)$. Geben Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an.

Aufgabe 5 Von den folgenden Abbildungen $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge E des Standardraumes $\mathbb{E}^n$ gebe man für $x \in E$ die partiellen Ableitungen $D_i f(x)$, die totale Ableitung $f'(x)$ sowie den Gradienten $\nabla f(x)$ an (sofern diese existieren), und untersuche, ob f stetig differenzierbar auf E ist.

(a) $f(x) = \|x\|$ mit $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) $f(x) = \frac{\sin(\|x\|)}{\|x\|}$ mit $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Im Falle $n = 2$ nennt man den Graphen von f mexikanischer Hut. Zur Bestimmung der Ableitung benutze man (a) und die allgemeine Kettenregel aus (3.3.2).

(c) $f(x, y) = e^{-x} \cos(y)$ mit $E = \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6 Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(0, 0)$ nicht stetig ist und dort auch nicht alle Richtungsableitungen existieren. Zeige weiterhin, dass aber alle partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ existieren.

Zur Übung am 26.04.2017, 11.00 Uhr, C 108

sind aus Serie 14 Aufgabe 6 c), d), i), sowie aus Serie 15 die Aufgaben 2, 3 und 5 als Hausaufgaben abzugeben.
