Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemster 2019

# Mathematik für Physiker

## Serie 16: Ableitungen

**Aufgabe 1** Man beweise folgende Ableitungsregeln mit Hilfe der Ableitungsregeln für einargumentige Funktionen.

a) Sind die Funktionen $x, y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ im Punkte $t \in I$ differenzierbar, so gilt $\frac{d}{dt}\langle x(t), y(t)\rangle = \langle \dot{x}(t), y(t)\rangle + \langle x(t), \dot{y}(t)\rangle$.

b) Sind die Funktionen $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $t \in I$ differenzierbar, so gilt $\frac{d}{dt}(\varphi(t)x(t)) = \dot{\varphi}(t)x(t) + \varphi(t)\dot{x}(t)$.

c) Sind die Funktionen $f, g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $E$ differenzierbar, so gilt $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + \nabla g \cdot f$

**Aufgabe 2** Für die folgenden quasilinearen Abbildungen $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ im Standardraum $\mathbb{E}^3$ gebe man die (totale) Ableitung $f'(x)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in E$ an:

a) $f(x) = \frac{c}{\|x\|^3} x$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $E = \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ (Zentrales Kraftfeld)

b) $f(x) = \frac{c}{\|x\|^2 - \langle e^{(3)}, x\rangle^2}(e^{(3)} \times x)$ und $E = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \mid (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$ (Magnetischer Wirbel).

**Aufgabe 3** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Durch die Koordinatentransformation $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ auf Polarkoordinaten wird die Funktion $f(x, y)$ transformiert in die Funktion $F : E' \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

a) Welcher Zusammenhang ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel zwischen den partiellen Ableitungen 1-ter und 2-ter Ordnung von $f$ und $F$?

b) Für eine Funktion $g : E' \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g \in C^2(E', \mathbb{R})$ sei $\triangle g(x) = \sum_{i=1}^n D_{ii}g(x)$ der **Laplace-Operator** angewendet auf $g$ an der Stelle $x$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\triangle f$ und $\triangle F$?

**Aufgabe 4** Es sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Summenfunktion einer Potenzreihe mit Zentrum $x_0$ und dem (offenen) Konvergenzintervall $I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k.$$

(a) Man beweise durch Induktion nach $n \geq 0$, dass für die $n$-te Ableitung von $f$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x - x_0)^{k-n} \qquad \text{für alle } x \in I.$$

(b) Beweise $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 5** Für die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & \text{für } (x,y) = (0,0)\ , \end{cases}$$

bestimme man:

(a) die Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt $(\pi, 0, 0)$.

(b) die Taylor-Entwicklung bis zur 2. Ordnung in $(0,0)$ und $(\pi, 0)$.

**Aufgabe 6** Es sei $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung auf einer offenen Menge $E$ des Standardraumes $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Weiterhin seien $a \in E$ ein fester Punkt und $f$ sei in $x = a$ total differenzierbar mit $\nabla f(a) \neq \vec{0}$. Man beweise dann folgende Aussagen:

(a) Ist $u = \nabla f(a)$, so ist $D_u f(a) = \|\nabla f(a)\| > 0$ und $D_{-u} f(a) = -\|\nabla f(a)\| < 0$.

(b) Der Punkt $x = a$ ist keine lokale Extremwertstelle von $f$.

(c) $D_u f(a)$ hat genau dann den größten Wert, wenn $u = \alpha \nabla f(a)$ für eine positive reelle Zahl $\alpha$ ist. Somit zeigt also $u = \nabla f(a)$ in Richtung des größten Anstieges der Funktion $f$ im Punkte $x = a$.

*Bemerkung: Des Weiteren kann gezeigt werden, dass der Gradient $\nabla f(a)$ senkrecht auf den Höhenlinien zum Wert $f(a)$ steht.*

**Aufgabe 7** Eine (unendliche) rechteckige Platte wurde so aufgeheizt dass die Temperatur am Punkt $(x,y)$ gegeben ist durch $T(x,y) = 50 - x^2 y$ (in Grad Celsius). Eine Maus befinde sich am Punkt $(x_0, y_0) = (1,2)$ an dem eine Temperatur von $48°C$ herrscht. In welcher Richtung sollte sich die Maus fortbewegen, um schnellstmöglich einen kühleren Punkt zu erreichen?

---

Zur Übung am 26.04.2019, 11.00 Uhr, C 108 sind noch **zusätzlich** von dieser Serie die Aufgaben 2 und 4 als **Hausaufgaben** abzugeben.

---