Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 17: Einige Anwendungen der Differentialrechnung

Aufgabe 1 (a) Berechne die Taylorreihe von $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+x)$ um die Punkte $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$. Leiten Sie (aus einer dieser Darstellungen) eine Formel für $\ln 2$, in Form einer Reihendarstellung, her.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Restglieds von Lagrange ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x - 1/e| < 10^{-2}$

(c) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um den Punkt $x_0 = 1$ für

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 2x + 4.$$

Aufgabe 2 Gegeben ist $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, $x \geq -1$.

(a) Stelle das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

(b) Schätze das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für $x \in [-1, 3]$ unabhängig von der Zwischenstelle ξ ab.

Aufgabe 3 (a) Man bestimme die folgenden Grenzwerte mit der Regel von Bernoulli-l'Hôspital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

(b) Es sei $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ jedoch nicht. Warum ist dies kein Widerspruch zur Regel von de l'Hôspital?

(c) Berechne außerdem die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

Aufgabe 4 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x + 1$ sowie das Intervall $I = [\frac{1}{2}, \frac{17}{2}]$. Man bestimme das globale Maximum $\max_{x\in I} f(x)$ und das globale Minimum $\min_{x\in I} f(x)$ von f auf I.

Aufgabe 5 Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ $x^4 + x + 1 > 0$ gilt. Dazu untersuche man das Monotonieverhalten der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 + x + 1$.

Aufgabe 6 Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{3} < \frac{x^4 + 1}{x^4 + x + 1} < \frac{5}{2}.$$

Dazu betrachte man die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^4 + x + 1}$$

und beantworte folgende Fragen

a) Welche Nullstellen besitzt f ?

b) Welche Werte haben die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$?

c) Wie sieht das Monotonieverhalten von f auf $\mathbb{R}$ aus ?

d) Existieren das globale Maximum $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ und das globale Minimum $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$?

Aufgabe 7 Es soll mit dem Banachschen Fixpunktsatz gezeigt werden, dass die Gleichung $x = x^5 - 2$ im Intervall $[1, 2]$ eine Lösung hat.

(a) Zeige, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^5 - 2$ eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt und bestimme deren Ableitung auf dem Intervall $[1, 2]$.

(b) Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass g^{-1} eine Kontraktion auf $[1, 2]$ ist und folgere die Existenz eines Fixpunktes $x^* \in [1, 2]$ von g, das heißt es gilt $x^* = g(x^*)$.

(c) Approximiere den Fixpunkt x^* durch die Iteration $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$, $n \geq 1$ mit $x_0 := 1$ bis auf die zweite Nachkommastelle genau.

Zur Vorlesung am 03.05.2019, 11.00 Uhr, C 108 sind die Aufgaben 2, 3 (c), und 6 als **Hausaufgaben** abzugeben.
