Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 18: Lokale Extrema und implizite Funktionen

Aufgabe 1 Zur approximativen Bestimmung der Lösung der Gleichung

$$\cos x = 2x - 1$$

benutze man den Fixpunktsatz von Banach.

a) Man überlege sich, dass die Gleichung im Interval $[0, 1]$ genau eine Lösung hat, und leite eine geeignete Fixpunktgleichung her. Man zeige auch, dass sich die Fixpunktgleichung $g(x) = x$ mit $g(x) := \cos(x) - x + 1$ nicht für die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes eignet.

b) Mit dem Startwert $x_0 = 0.5$ gebe man die Iterationen bis x_7 von (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ an.

c) Man führe für die Näherung x_7 jeweils eine a priori- und eine a posteriori-Fehlerabschätzung durch.

d) Wie viele Iterationen sind durchzuführen, um $|x_n - x^*| \leq 10^{-4}$ zu erreichen?

e) Führe zum Vergleich drei Schritte des Newtonverfahrens mit $h(x) := \cos(x) - 2x + 1$ mit dem Startwert $x_0 = 0.5$ durch!

Aufgabe 2 Man bestimme und klassifiziere die lokalen Extremwertstellen der folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + 5y, \quad g(x, y) = e^{-x^2}(4y + x^2 - y^2).$$

Aufgabe 3 Nach der Multiplikatorregel von Lagrange bestimme man alle Punkte, die als lokale Extremwertstellen für die gegebene Funktion f unter der jeweiligen Nebenbedingung in Frage kommen. Was lässt sich über globale Extremwerte von f unter den Nebenbedingungen aussagen?

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$,

b) $f(x, y, z) = xyz$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Aufgabe 4 Es sei $P = (0, a)$ ein Punkt in der Ebene. Bestimmen Sie die Punkte $Q = (x, y)$ der Parabel $y = x^2$, die zu P den kleinsten Abstand haben.

Aufgabe 5 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 27x - 6y + 13$$

und die Menge $D = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ y \geq -1,\ x + y \leq 2\}$. Bestimmen Sie die globalen Extremwertstellen und die globalen Extremwerte von f auf D.

Aufgabe 6 Man ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0 = (1, -2)$ an die implizit gegebene Kurve $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$.

Aufgabe 7 Man bestätige, dass durch die implizit gegebene Funktion

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 25 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 = (4; 3; 0)$ eine Funktion $z = f(x, y)$ in impliziter Form gegeben ist. Man berechne die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x, y)$ an der Stelle $(4; 3)$ und ermittle die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche von f im Punkt P_0.

Aufgabe 8 Man betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} xu + yv^2 &= 0, \\ xv^3 + y^3u^6 &= 0. \end{aligned}$$

Existieren eindeutige Lösungen für u, v in Termen von x, y in einer Umgebung von $(x, y, u, v) = (1, -1, 1, 1)$ bzw. von $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 0)$? Man berechne $\frac{\partial u}{\partial x}$ in $(x, y) = (1, -1)$ und in $(x, y) = (0, 1)$, falls diese existieren.

Aufgabe 9 Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x, y) := x^2 + xy^3 - 3xy + 1.$$

a) Man bestätige, dass $\mathrm{P}_0 = (1, 1)$ ein stationärer Punkt von f ist.

b) Man bestimme alle stationären Punkte von f.

c) Man untersuche, ob in $(1, 1)$ ein lokales Extremum vorliegt und gebe gegebenenfalls die Art des Extremums an.

Zur Übung am 10.05.2019, 11.00 Uhr, C 108 sind die Aufgaben 1, 4 als **Hausaufgaben** abzugeben.
