Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 19: Integralrechnung 1

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^{3} x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \frac{|\ln x|}{x}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_0^{3} |x^2-3x+2|\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen von $\sin x$ und $\cos x$ in den Grenzen von $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3 Durch geeignete Substitution bestimme man folgende unbestimmte Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x+2}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{x-1+\sqrt[3]{x+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$, i) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x+2\sin^2 x\,\cos^2 x}$, k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10x-x^2-21}}$, l) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-16}\,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-10x+29}}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie den Inhalt der Schleife, die durch die Kurve

$$x(t) := 3t^2, \qquad y(t) := 3t-t^3$$

eingeschlossen wird. Zeichnen Sie zuvor die Kurve (Schleife) mit dem Computer!

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung des Inhaltes die Sektorformel

$$F := \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t)-y(t)\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 5 Stellen Sie die Sektorformel

$$F := \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$

in Polarkoordinaten dar.

Aufgabe 6 Berechnen Sie die Volumina der Körper, die man durch Rotation der Kurven um die x-Achse erhält:

a) $xy = 1,\ 1 \le x \le 2$

b) $x = -\sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$

Aufgabe 7 Man untersuche, welche der uneigentlichen Integrale existieren, und bestimme deren Wert:

$$\text{a)}\ \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b)}\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{c)}\ \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

<u>Hinweis:</u> Bei Aufgabe c) gebe man Intervalle an, für die das Integral uneigentlich ist und untersuche es auf Konvergenz bzw. Divergenz.

Aufgabe 8 Man ermittle, bei Existenz der uneigentlichen Integrale,

a) den Wert des uneigentlichen Integrals bzw.

b) den Cauchyschen Hauptwert des uneigentlichen Integrals:

$$\text{a)}\ \int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)}\ \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 9 Man untersuche mittels Integralkriterium die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz und treffe eine Fallunterscheidung bezüglich des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}\,, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^\alpha}\,.$$

Welche Reihen können als konvergente Majoranten bzw. als divergente Minoranten herangezogen werden?

Zur Übung am 17.05.2019, 10:45 Uhr, C 108 sind die Aufgaben 1c), e), f), 2 und Serie 18 Aufgabe 9 als Hausaufgaben abzugeben.
