Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 20: Bereichsintegrale

Aufgabe 1 Man skizziere den Integrationsbereich und vertausche die Integrationsreihenfolge für folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx,$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin(y)} f(x,y)\,dxdy,$

c) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dydx,$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy,$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dydx,$

f) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dydx,\ a>0,$

g) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln(x)} f(x,y)\,dydx,$

h) $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dydx.$

Aufgabe 2 Man skizziere den Integrationsbereich und berechne die Doppelintegrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\,dydx,$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)r\,drd\varphi,$

c) , $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2y}{\pi}}^1 \cos(yx^{-1})\,dxdy$

d) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y+1} x\ln(y)\,dxdy,$

e) $\displaystyle\int_1^e \int_1^{ey} \ln(xy^{-1})\,dxdy,$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x+y}\sin(x+y)\,dxdy,$

g) $\displaystyle\int_{-1}^3 \int_{x^2}^{2x+3} 2\sqrt{y-x^2}\,dydx,$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt{sin(2\varphi)}} r\,drd\varphi.$

Aufgabe 3 Es sei $T_n := \{(x_1,...x_n) \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq 1\}$ der n-dimensionale Tetraeder. Man zeige:

$$|T_n| = \frac{1}{n!}.$$

Aufgabe 4 Es ist das Integral über den Tetraeder $T \in \mathbb{R}^3$

$$\int_T xyz\, d(x,y,z)$$

zu berechnen (zum Tetraeder siehe auch Aufgabe 3), wobei der nicht-reguläre Tetraeder die Eckpunkte (0,0,0),(1,0,0), (1,1,0),(1,1,1) hat.

Aufgabe 5 Es sei $G \in \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge. Dann berechnet sich das Volumen V von G durch $V = \int_G 1 d(x,y,z)$. Ist auf G eine stetige Dichteverteilung $\rho = \rho(x,y,z)$ gegeben, so wird $M = \int_G \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$ als Masse von G bezeichnet. Der Punkt (x_S, y_S, z_S), dessen Koordinaten sich gemäß

$$x_S = \frac{\int_G x\rho(x,y,z)\, d(x,y,z)}{\int_G \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)}, y_S = \frac{\int_G y\rho(x,y,z)\, d(x,y,z)}{\int_G \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)}, z_S = \frac{\int_G z\rho(x,y,z)\, d(x,y,z)}{\int_G \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)}$$

berechnen, heißt Schwerpunkt von G bezüglich der Dichteverteilung $\rho(x,y,z)$. Man bestimme den Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

vom Radius $R > 0$ und konstanter Dichteverteilung $\rho = c$.

Aufgabe 6 Aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ wird der Zylinder $(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$ herausgebohrt. Wie großist das Volumen der durchlöcherten Restkugel?

Aufgabe 7 Welches Volumen hat der Körper, der von den folgenden Flächen begrenzt wird?

a) $x = 0,\ x = 2\pi,\ y = 0,\ y = 1,\ z = y,\ z = y^2,$

b) $x = 0,\ y = 0,\ y = x + 1,\ z = -xy - 1,\ z = x^2 + y^2 + 1.$

Aufgabe 8 Die Punktmenge B sei der im 1. Oktantanten gelegene Teil des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. Wie lauten bei Integration über B die Integrationsgrenzen in

a) kartesischen Koordinaten,
b) Zylinderkoordinaten,
c) elliptischen Koordinaten,
d) Kugelkoordinaten.

Berechnen Sie (mit möglichst wenig Aufwand bezüglich der Integration) Volumen und geometrische Schwerpunktskoordinaten von B.

Zur Übung am 24.05.19 sollen zwei Integrale von Serie 19 Aufgabe 3 berechnet, sowie die Existenz des Riemann-Integrals für die Dirichletfunktion überprüft werden. Die Übung am Montag den 27.05. wird mit der Vorlesung am 29.05 getauscht. Die **Übung am 31.05.19** wird verschoben. **Zur Übung am 03.06.19,** sind die Aufgaben 2 a), d), g) und 7 a), b) als Hausaufgaben abzugeben.
