Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 21: Kurvenintegrale (2. Art) über Vektorfeldern

Aufgabe 1 Zeigen Sie für die folgenden uneigentlichen Integrale

$$\int_{y=1}^{\infty}\int_{x=1}^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy \neq \int_{x=1}^{\infty}\int_{y=1}^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dydx.$$

Aufgabe 2 Man berechne $\int_\gamma (y^2dx - x^2dy)$, wobei γ

a) die geradlinige Verbindung von $(0,1)$ nach $(1,0)$ bzw.

b) der Viertelbogen des Einheitskreises von $(0,1)$ nach $(1,0)$ sei.

Aufgabe 3 Gegeben sind das Vektorfeld v mit $v(x,y)=(y,x+y)^T$ und der Parabelbogen γ mit $y=x^2$ von $(0,0)$ bis $(1,1)$. Man gebe eine Parameterdarstellung der Kurve γ an und bestimme das Kurvenintegral $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$.

Aufgabe 4 Gegeben sind das Vektorfeld v mit $v(x,y)=(-y,x)^T$ und die Ellipse γ in kartesischer Darstellung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Man gebe eine Parameterdarstellung der Kurve γ an und berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$.

Aufgabe 5 Man berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$ bei vorgegebenem Vektorfeld

$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ v(x,y,z)=(2x-y,-yz^2,-y^2z)^T$$

und parametrisierter Kurve

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma(t)=(\cos(t),\sin(t),1)^T.$$

Aufgabe 6 Betrachtet wird das magnetische Feld H eines geraden, unendlich langen, von einem Gleichstrom durchflossenen Leiters (Leiter: z-Achse, Stromrichtung: z-Richtung). Es gilt

$$H(x,y,z)=\frac{k}{x^2+y^2}(-y,x,0)^T$$

(der Proportionalitätsfaktor k hängt von den gewählten Einheiten, von magnetischen Konstanten und vom Strom ab, zu dem die Feldstärke $|H(P)|$ proportional ist).
Man gebe $|H|$ an, veranschauliche $|H|$ in Abhängigkeit vom Abstand des Punktes P zum Leiter in einem $r-|H|$-Diagramm und veranschauliche in der $x-y$-Ebene das Vektorfeld $|H|$. Man berechne$\int_\gamma H\overrightarrow{dx}$ wobei

a) γ der Viertelkreis: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

b) γ die geradlinige Verbindung von $(1, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$ und

c) $\gamma : \gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 0)^T,\ 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ sei.

Aufgabe 7 Man berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$ wobei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v(x, y) = (2xy, x^2)^T$$

und die Kurven γ durch

a) γ sei die Kurve $y = x^3$ von $(0, 0)$ bis $(1, 1)$,

b) γ sei die Kurve $y^2 = x$ von $(0, 0)$ bis $(1, 1)$.

Aufgabe 8 Man untersuche, ob

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v(x, y) = (x^2 + y, x - y^2)^T$$

ein Potentialfeld (d.h. ein Gradientenfeld) ist. Man gebe gegebenenfalls eine Potentialfunktion φ an und berechne $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$, wobei γ die Verbindungsgerade von $(1, 1)$ nach (a, a) mit $a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 9 Zirkulation. Das Kurvenintegral $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$ eines Geschwindigkeitsfeldes v längs einer geschlossenen Kurve γ wird auch die Zirkulation des Feldes v längs γ genannt. Durch $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$ wird eine Bilanz der tangentialen Komponenten von v längs γ gebildet. Gegeben ist das Geschwindindigkeitsfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

und γ die Ellipse, die sich als Schnittkurve des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$ darstellt. Die Kurve γ ist so orientiert, dass ihre Projektion in der xy-Ebene im mathematisch positiven Sinn orientiert ist. Man berechne die Zirkulation $\int_\gamma v\overrightarrow{dx}$.

Zur Übung am 07.06.2019, 10.45 Uhr, C 108

sind die Aufgaben 3, 5 und 7 als Hausaufgaben abzugeben.
