Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 22: Potentialfunktionen, Satz von Green

Aufgabe 1 Man zeige das $v(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})^\top$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Integrabilitätbedingungen erfüllt. Berechne außerdem das Kurvenintegral $\int_\gamma v(x,y)\overrightarrow{dx}$ entlang der geschlossenen Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^\top$ für $t \in [0, 2\pi]$. Wieso ist das Ergebnis kein Widerspruch zum Hauptsatz über Kurvenintegrale, Satz 2 aus (5.3.5)?

Aufgabe 2 Untersuche die folgenden Integrale auf Wegunabhängigkeit und gib im Falle der Wegunabhängigkeit eine Potentialfunktion an.

a) $v(x,y,z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})^\top$,

b) $v(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)(x,y,z)^\top$, $x, y, z \in \mathbb{R}$,

c) $v(x,y) = (\frac{ay}{(x-y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2} + 1, z)^\top$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Man berechne die Länge, geometrischen Mittelpunkt und eine zulässige normierte Parameterdarstellung für die folgenden Kurven:

a) $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)^\top$, $t \in [0, 2\pi]$ (Zykloide)

b) $\gamma(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t, 1)^\top, 0 < t < \infty$ (Spirale)

Aufgabe 4 Gegeben sei das Möbiusband durch die Parameterdarstellung

$$(u,v) \mapsto \Phi(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos \frac{u}{2} \cos u \\ \cos \frac{u}{2} \sin u \\ \sin \frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

für $(u,v) \in \mathbb{R} \times (-1,1)$. Untersuche welche der Eigenschaften (F1) bis (F4) aus der Definition einer regulären Fläche aus (6.1.2) erfüllt sind.

Aufgabe 5 Berechne einmal auf direktem Wege und anschließend über den *Greenschen Satz* folgende Integrale:

a) $\int_{\partial B}(y^2\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$ mit $B := [0,1] \times [0,1]$,

b) $\int_{\partial B}(xy\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y)$ mit $B := [0,1] \times [1,3]$,

c) $\int_{\partial B}((x-y^3)\,\mathrm{d}x - (y^2-x^3)\,\mathrm{d}y)$ mit $B := K[(0,0),1]$.

Aufgabe 6 Im Standardraum $\mathbb{E}^2$ sei das Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\vec{v}(x,y) = (-y,x)^T$ gegeben. Weiterhin sei Γ die Strecke vom Ursprung $P_1 = (0,0)^T$ zum Punkt $P_1 = (a,b)^T$. Man zeige die Sektorformel von Leibiz, das heißt $\int_\Gamma \vec{v} d\vec{x} = 0$.

Aufgabe 7

a) Man berechne die Ladung Q des räumlichen Bereiches

$$V := \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0 \wedge x+y+z \leq 1\},$$

wenn die elektrische Ladungsdichte durch $\rho(x,y,z) := \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}$ gegeben ist.

b) Ein gerader Kreiskegel mit der Grundfläche in der xy-Ebene, für die $x^2+y^2 \leq 3$ gilt und der Spitze im Punkt $\mathrm{P}(0;0;4)$ hat die ortsabhängige Dichte $\rho(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$. Man bestimme die Masse des Kegels.

Zur Übung am 28.06.2019, 10.45 Uhr, C 108

sind die Aufgaben 2 a), 3 a), und 5 b) als Hausaufgaben abzugeben.
