Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemster 2019

Mathematik für Physiker

Serie 23: Oberflächenintegrale, Satz von Gauß

Aufgabe 1 Der Flächeninhalt der Mantelfläche O_x, die durch Drehung des Graphen einer stetigen Funktion $x \mapsto f(x)$ um die x-Achse erzeugt wird, ist gegeben durch

$$O_x := 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Leite diese Formel mit Hilfe eines Oberflächenintegrals her.

Aufgabe 2 Gesucht ist der Flächeninhalt des Teils der Halbkugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,, \quad R > 0,\; z \geq 0\,,$$

der in dem zur z-Achse parallelen Kreiszylinder

$$x^2 + y^2 \leq R^2/4$$

liegt.

Aufgabe 3 Man berechne die Mantelfläche des Kegels

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\; 0 \leq z \leq R\} \text{ für } R > 0,$$

mit Hilfe des Flächenintegrals und vergleiche das Ergebnis mit dem Flächeninhalt, den man durch Abwickeln der Fläche erhält.

Aufgabe 4

a) Man berechne die Oberfläche einer Kugel K mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ gemäßder Definition eines Oberflächenintegrals.

b) Man berechne über ein Oberflächenintegral (!) das Volumen der in a) genannten Kugel unter Zuhilfenahme des Gaußschen Satzes.

Hinweis: Man verwende für die Oberfläche der Kugel die Parameterdarstellung

$$\vec{\Phi}(\varphi, \vartheta) := (R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\vartheta)^T\,, \quad (\varphi, \vartheta) \in D := [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Für die Teilaufgabe b) muss für das Oberflächenintegral ein geeignetes Vektorfeld $\vec{v}$ so definiert werden, dass das Volumenintegral $\iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\tau$ nach Satz von Gauß die Gestalt $a \cdot \iiint_K 1 \cdot \mathrm{d}\tau$ mit einer Konstante $a \in \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 5

a) Der Körper V werde durch eine Oberfläche F begrenzt, die sich aus der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 4$ in der x-y-Ebene und dem Paraboloid $z := 4 - x^2 - y^2$ zusammensetzt, und $\vec{n}$ sei die äußere Normale der Oberfläche. Berechnen Sie mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes* des Raumes bei gegebenen $\vec{v}(x, y, z) := (x+y, y+z, x+z)^T$ das Integral

$$\int_F \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma.$$

b) Das Oberflächenintegral aus Teil a) ist direkt zu berechnen.

Aufgabe 6 Es sei $G := \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4 \text{ und } 0 \le z \le 5\right\}$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z) := (y^2, x^2, z^2)^T$ durch den Rand von G, also ∂G, mit Hilfe von

$$\int_{\partial G} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma$$

einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Aufgabe 7 Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet, dass durch die Ebenen $z = 0,\ y = 0$ und $y+z = 2$, sowie durch die Fläche $z := 1 - x^2$ begrenzt wird. Weiter sei $\vec{v}(x, y, z) := (3x^2 + 2y^2, 4xy - 3z^3, -9yz^2)^T$. Es soll der Fluss von $\vec{v}$ durch ∂G berechnet werden.

Aufgabe 8 Man beweise den Gaußschen Satz für Skalarfelder: *Es sei $\varphi : B \to \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld auf einem Körper $B \subset \mathbb{R}^3$. Die Normale von ∂B weise nach außen. Dann gilt:*

$$\iint\limits_{\partial B} \varphi(\vec{r}) \, \overrightarrow{\mathrm{d}\sigma} = \iiint\limits_{B} \operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \, \mathrm{d}\tau \,. \tag{1}$$

<u>Hinweis:</u> Man setze im Gaußschen Satz $\iint\limits_{\partial B} \vec{v} \, \overrightarrow{\mathrm{d}\sigma} = \iiint\limits_{B} \operatorname{div}(\vec{v}) \, \mathrm{d}\tau$ das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) := \varphi(\vec{r}) \, \vec{a}$ mit kostantem $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 9 Man verifiziere die Formel (1) (in Aufgabe 8) für die Einheitskugel B und das Skalarfeld $\varphi(\vec{r}) := |\vec{r}|^2$ ($\vec{r}$ ist wie üblich der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten).

Zur Übung am 05.07.2019, 10.45 Uhr, C 108

sind die Aufgaben 2, 4 and 5 als Hausaufgaben abzugeben.
