Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Serie 24: Die Sätze von Gauß und Stokes

Aufgabe 1 Der Membranmantel eines Kühlturms hat die Form eines einschaligen Rotationshyperboloids: Das Hyperbelstück

$$\frac{x^2}{37^2} - \frac{z^2}{67^2} = 1, \ -114 \leq z \leq 32, \ x > 0,$$

wird um die z-Achse gedreht. Wie groß ist die Oberfläche?

Aufgabe 2 Gilt der Satz von Gauß auch für ein Vektorfeld mit Singularität, wenn man der Volumenintegral als uneigentlich betrachtet? Konkret bestimme man für dei Kugel $K = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ die Integrale

$$\int_K < v, n > d\sigma, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \operatorname{div}(v) db$$

einmal mit $v(x) = \frac{x}{|x|}$ und $v(x) = -\frac{x}{|x|^3}$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Aufgabe 3 Beweise mit dem Satz von Gauß: Ist $v = \operatorname{rot} w$ für ein Vektorfeld w und $v \in C^1$, dann verschwindet das Oberflächenintegral 2. Art von v über jede geschlossene C^1-Fläche.

Aufgabe 4 (Aharonov-Bohm-Effekt)

Wir betrachten das Vektorfeld $v(x, y, z) = \frac{q}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)^\top : z \in \mathbb{R}\}$

(a) Bestimme die Rotation des Vektorfeldes.

(b) Berechne für $z \in \mathbb{R}$ des Kurvenintegral 2. Art entlang eines Kreises mit Radius r um den Mittelpunkt $(0, 0, z)^\top$ welcher in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird.

(c) Wieso sind (a) und (b) kein Widerspruch zum Satz von Stokes?

Aufgabe 5 Man berechne $\oint \vec{F} \cdot \vec{dr}$ für $\vec{F} = f(|\vec{r}|)\vec{r}, \ \vec{r} = (x, y, z)^T$ längs der Kanten eines achsenparallelen Quadrates der (x,y)-Ebene mit der Kantenlänge 1 und dem Zentrum(0;0) (mathematisch positiv orientiert) mittels des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 6 Berechnen Sie das folgende Kurvenintegal direkt und mittels des Satzes von Stokes

$$\oint_\gamma ((y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz).$$

Dabei ist γ die Schnittkurve der beiden Flächen

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rx, \quad x^2+y^2 = 2rx, \quad 0 < r < R,\ z > 0,$$

die so durchlaufen wird, dass das von ihr umrandete kleinere Flächenstück auf der Kugeloberfläche stets links liegt.

Aufgabe 7 Gegeben ist die Fläche

$$S : z = 8 - \sqrt{(x^2+y^2)^3};\ x^2+y^2 \leq 4.$$

Das Vektorfeld $\vec{v}$ lautet in kartesischen Koordinaten $\vec{v} = (y^3, 0, 0)^T$.

a) Man skizziere S.

b) Mit dem Satz von Stokes berechne man mit einer zur z-Achse weisenden Normale $\vec{n}$

$$\iint_S rot\vec{v} \cdot \vec{n} dO.$$

Aufgabe 8 Gegeben ist das Möbius-Band M

$$\vec{x}(u,v) = ((2+u\cos v)\cos 2v, (2+u\cos v)\sin 2v, u\sin v)^T,\ 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v < 2\pi,$$

und das Vektorfeld des magnetischen Wirbels

$$\vec{v} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)^T,\ x^2+y^2 > 0.$$

Man berechne

a) $\iint_M rot\vec{v} \cdot d\vec{O} = \iint_M [rot\vec{v}, \vec{x}_u, \vec{x}_v] du dv$,

b) $\int_{\partial M} \vec{v} \cdot d\vec{x}$ für die durch $\vec{v}$ bestimmte Richtung auf ∂M. Warum ist der Satz von Stokes nicht anwendbar?

Zur Übung am 12.07.2019, 10.45 Uhr, C 108

sind die Aufgaben 1, 4 and 7 als Hausaufgaben abzugeben.
