Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Wintersemester 2018/19

Mathematik für Physiker

Serie 13: Grenzwerte

Aufgabe 1 Es sei $(W, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über dem Körper $K \subseteq \mathbb{C}$ und es seien $(u^{(n)})$ und $(v^{(n)})$ W-Folgen mit $\lim_{n\to\infty} u^{(n)} = a$ und $\lim_{n\to\infty} v^{(n)} = b$ mit $a, b \in W$. Man zeige, unter Verwendung von Kapitel III (1.6.1) Folgerung 3 sowie der Dreiecksungleichung für die Norm, dass dann für $\alpha, \beta \in K$ gilt: $\lim_{n\to\infty}(\alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}) = \alpha a + \beta b$

Aufgabe 2 Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume über dem Körper $K \subseteq \mathbb{C}$ und es sei $D \subseteq V$ eine nichtleere Menge. Weiterhin seien $f, g : D \subseteq V \to W$ Abbildungen. Man beweise dann:

(a) Ist $a \in \mathrm{cl}(D)$ und ist $\lim_{x\to a:D} f(x) = b_1$ und $\lim_{x\to a:D} g(x) = b_2$ mit $b_1, b_2 \in W$, so ist $\lim_{x\to a:D}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha b_1 + \beta b_2$ für alle $\alpha, \beta \in K$. (Man benutze Aufgabe 1).

(b) Ist $a \in D$ und sind f, g stetig in a auf D, so ist $h = \alpha f + \beta g$ stetig in a auf D für alle $\alpha, \beta \in K$.

(c) Sind f, g stetig auf D, so ist $h = \alpha f + \beta g$ stetig auf D.

(d) Es sei $C(D, W) = \{f : D \to W \mid f \text{ stetig auf } D\}$. Aus Kapitel II, Abschnitt (6.2), wissen wir, dass $\mathrm{Abb}(D, W)$ ein K-Vektorraum ist. Man zeige dann, dass $C(D, W)$ ein linearer Unterraum von $\mathrm{Abb}(D, W)$ ist und somit ebenfalls ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 3 Wir betrachten den Standardraum $\mathbb{E}^1$ und untersuchen den $\mathbb{R}$-Vektoraum $\mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ mit $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Es sei $a \in \mathrm{cl}(D)$, $f, g \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ und es sei

$$\lim_{x\to a:D} f(x) = b \text{ und } \lim_{x\to a:D} g(x) = c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Was lässt sich dann über die Grenzwerte der Funktionen $f + g, f - g, f \cdot g$ sowie f/g (unter der Annahme, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt) an der Stelle a aus D aussagen. Man gebe eine Tabelle an analog zur Tabelle aus Kapitel III, (1.3)(G3). Man beweise die Aussage für $h = f \cdot g$. Welche unbestimmten Ausdrücke treten auf?

(b) Es sei $a \in D$ und es seien $f, g \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ Funktionen, die in a auf D stetig sind. Dann sind auch die Funktionen $f + g, f \cdot g$, cf (mit $c \in \mathbb{R}$) sowie f/g (unter der Annahme, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt) in a aus D stetig.

(c) Die Funktionen $f, g \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ seien stetig auf D. Man zeige, dass dann auch die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$, cf sowie f/g (unter der Annahme, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt) auf D stetig sind.

(d) Die Funktion $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ sei auf D stetig und es sei $a \in D$ ein Argument von f mit $f(a) \neq 0$. Man zeige , dass es dann ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap U_\varepsilon(a)$ gilt: $f(x) \neq 0$. Man kann den Beweis indirekt führen. Also wir nehmen an, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in D \cap U_\varepsilon(a)$ existiert mit $f(x) = 0$. Nun wende man die Aussage für alle $\varepsilon = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ an und treffe eine Aussage über $\lim_{x \to a:D} f(x)$, welche der Stetigkeit von f in a widerspricht.

(e) Man zeige, dass die Potenzfunktionen $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ mit $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $D = \mathbb{R}$ auf D stetig sind.

(f) Es seien $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Polynomabbildungen und es sei P die Menge der Nullstellen von g, d.h. $P = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, und $D = \mathbb{R} \setminus P$. Weiterhin sei $h = f/g \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ die zugehörige rationale Funktion; dann nennt man die Elemente von P, die nicht Nullstellen von f sind, die Polstellen von h. Man zeige, dass D dann die Vereinigung von endlich vielen offenen Intervallen ist und dass h dann stetig auf D ist. Was lässt sich über die (einseitigen) Grenzwerte von h an den Polstellen aussagen.

(g) Es sei $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ eine gebrochen rationale Funktion. Man gebe die Menge P der Polstellen von h an und skiziere den Graph $y = h(x)$ der Funktion in der Ebene $\mathbb{E}^2$.

Aufgabe 4 Man untersuche die Funktion f mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{für } x \neq 0 \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$ b) $f(x) := \begin{cases} x \cdot 2^{\frac{x}{|x|}}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$

c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-|x|}, & \text{für } x \neq 1, -1 \\ 1, & \text{für } x = 1 \\ 1, & \text{für } x = -1. \end{cases}$

Aufgabe 5 Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:

a) $f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & \text{sonst}, \end{cases}$ b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}, & \text{falls } x \neq \mathbb{N} \\ \dfrac{4x-6}{x+1}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}, & \text{falls } x \neq 1,\ x \neq 3. \\ A, & \text{falls } x = 1 \\ B, & \text{falls } x = 3 \end{cases}$

Für welche Werte A und B ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 6 Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren).

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{3x+5}\right)\dfrac{1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin(x))}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{\tan(4x)}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,

k) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\exp(y)-1}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}$.

Bemerkung: In der Differentialrechnung werden wir später folgende Grenzwertregel für unbestimmte Ausdrücke von l'Hospital behandeln: Es seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es sei $a \in \mathrm{cl}(D)$ bzw. $a = \infty$ oder $a = -\infty$. Gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Aufgabe 7 Beweisen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital durch Induktion nach $n \geq 0$, dass gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Aufgabe 8 Beweisen Sie den Satz aus Kapitel III, Abschnitt (2.5.2) über die Komposition $h = g \circ f$ von Abbildungen $f : D \subseteq V \to W$ und $g : D' \subseteq W \to X$ mit $f(D) \subseteq D'$ in normierten Räumen $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ $(X, \|\cdot\|_X)$.