Inst. für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Algebra
Univ.-Prof. Dr. M. Stiebitz (Curiebau C 219)
H. Gernandt (Curiebau C 230)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker

Vorbereitungsaufgaben

Aufgabe 1 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\sin(\pi/x)$ auf $\mathbb{R}$. Gib den maximalen Definitionsbereich der Funktion an und untersuche die Funktion auf Stetigkeit. Welcher Wert muss für $f(0)$ gewählt werden, damit die fortgesetzte Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

Aufgabe 2 (a) Bestimme die Taylorpolynom bis zur 4. Ordnung für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{im Punkt } x = 0.$$

(b) Schätzen sie das Restglied des Taylorpolynoms 2. Ordnung im Punkt $x = 1/2$ (unabhängig von der Zwischenstelle) nach oben ab.

(c) Bestimme mit (a) eine Nähungsformel für die kinetische Energie $E_{kin} := mc^2 - m_0c^2$ eines relativistischen Teilchens der Masse $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ mit der Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v und Lichtgeschwindigkeit c.

Aufgabe 3 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x, y) = \sin(\pi(x^2 + y)) + \cos(\pi y)$ über den Bereich $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

(a) Skizziere den Bereich B.

(b) Man bestimme die stationären Punkte von f im Inneren von B.

(c) Man untersuche die Funktion $g(x) := f(x, 0)$ in $|x| \leq 1$ auf Symmetrie, Extrema, Wendepunkte und Monotonie. (Hinweis: Für $u \approx 0.6533$ ist $\cos u = 2u \sin u$)

(d) Wo liegen die Extremstellen von f auf $y = 1 - x^2$, $y \geq 0$?

(e) Man ermittle die Lage und den Wert der globalen Extrema und trage diese Punkte in die Skizze von B ein.

Aufgabe 4 Gegeben ist die Kurve $g(x, y) = 12y^5 - 20xy^3 + 5x^4 = 0$ für $x, y > 0$.

(a) Für welche Punkte ist implizit eine Funktion $y = f(x)$ bestimmt? Berechne in diesen Punkten die Ableitung f' dieser Funktion und gibt die Gleichung für die Tangente an.

(b) Für welche Punkte der Kurve ist $f'(x) = 0$? Bestimme an diesen Punkten die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 5 Bestimmen sie die folgenden Integrale mit Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx, \quad \int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 + x} dx.$$

Aufgabe 6 Untersuchen sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale

$$\int_0^2 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx, \quad \int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

Geben Sie im Falle der Existenz auch den Wert an!

Aufgabe 7 (a) Skizziere den Integrationsbereich, berechne das Integral und vertausche die Integrationsgrenzen für

$$\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx dy.$$

(b) Berechne das Volumen des Körpers der durch die Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$ begrenzt ist.