Hausaufgaben: (Für jede Aufgabe werden 4 Punkte vergeben.)

Aufgabe 1 Gegeben sei die Menge $M := \{x : x = (x^1, x^2),\ x^1, x^2 \in \mathbb{R}^+\}$ und eine Relation '$\preceq$', definiert durch: $x \preceq y$ genau dann, wenn $x^1x^2 \geq y^1y^2$ und $\frac{x^1}{x^2} \geq \frac{y^1}{y^2}$. Zeigen Sie, dass $\preceq$ auf M eine Ordnung aber keine lineare Ordnung ist.

Aufgabe 2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei die Menge $M := \{x : x = (x^1, \ldots, x^n),\ x^i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$ mit zwei Operationen '$*$' und '$\oplus$' ausgerüstet. Es ist $x \oplus y := (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$ und $x * y := (x^1 \cdot y^1, \ldots, x^n \cdot y^n)$. Für welche n ist M mit diesen Operationen ein Körper?

Aufgabe 3 Beweisen Sie folgende Ungleichung: $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die gilt:

a) $\frac{3x+5}{2x+1} \geq 2x$,

b) $|2x + 1| = |x - 1| + 1$,

Für die Übung vorbereiten:

Aufgabe 5 Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird durch $xRy :\Leftrightarrow x - y$ ist durch 7 teilbar, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, eine Relation definiert. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 6 Konstruieren Sie einen Körper mit genau drei Elementen, $K = \{a, b, c\}$. (Hinweis: K muß genau eine Null und eine Eins enthalten!) Läßt sich K ordnen? (D.h.: Gibt es eine Ordnungsrelation auf K, die mit den Körperoperationen verträglich ist?)

Aufgabe 7 Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten der Gleichung $0 \cdot x = a$ in $\mathbb{K}$.

Aufgabe 8 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $a < b,\ c < 0 \quad \Rightarrow ac > bc.$

(ii) $0 < a < b,\ 0 < c < d \quad \Rightarrow ac < bd.$

Aufgabe 9 Beweisen Sie die untere Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt } : |x - y| \geq ||x| - |y||.$$

Aufgabe 10 Beweisen Sie folgende Rechenregel für den Betrag:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad \text{insbesondere gilt für} \quad y \neq 0,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Aufgabe 11 Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

a) $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

b) Für $a < b$ ist $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$.

Aufgabe 12 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die gilt:

a) $x - 1 < \frac{2x-4}{x-2}$,

b) $|1+x| \geq 4$,

c) $|1 - |2 - |x||| = 1$,

Zusatzaufgaben:

Aufgabe 13 Sei M eine gegebene Menge mit mindestens zwei Elementen, $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge (Menge aller Teilmengen von M). Beweisen Sie folgende Behauptung:
Die Mengeninklusion $\subset$ ($A \subset B$: A ist Teilmenge von B) definiert auf $\mathcal{P}(M)$ eine Ordnung aber keine lineare Ordnung.

Aufgabe 14 Beweisen Sie folgende Ungleichung: Für $a, b > 0$ gilt $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$, und Gleichheit tritt nur für $a = b$ ein.

Aufgabe 15 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die gilt: $||x+1| - |x+3|| < 1$.