



Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Arbeitsgruppe Analysis und Systemtheorie

Greens Satz als Alternative zum Maximumprinzip

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Philipp Sauerteig

betreut von
Jun.-Prof. Dr. Karl Worthmann

Ilmenau, den 28. Januar 2016

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei all denjenigen bedanken, die diese Bachelorarbeit erst ermöglicht haben.

An erster Stelle steht natürlich die TU Ilmenau und insbesondere das Institut für Mathematik mit sehr guten Studienbedingungen und einem geradezu familiären Betreuungsverhältnis.

Besonderer Dank gebührt Herrn Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann, meinem Betreuer beim Verfassen dieser Bachelorarbeit. Er hatte immer ein offenes Ohr für Probleme und stand mir mit Rat und Tat zur Seite. Andererseits hat er mir auch genügend Freiraum eingeräumt, um mich selbst zu entfalten.

Abschließend möchte ich mich selbstverständlich auch noch bei meinen Freunden und meiner Familie bedanken, die mich immer unterstützt haben.

Vielen Dank.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle von mir aus anderen Veröffentlichungen übernommenen Passagen sind als solche gekennzeichnet.

(Ort, Datum)

(Unterschrift)

Abstract

This Bachelor thesis examines two possible approaches to solve optimal control problems. Therefore, a biological problem with an economic application will be introduced and solved by Pontryagin's maximum principle on the one hand and using Green's theorem on the other hand.

The considered problem concerns fish farming. Due to economic sciences it is about maximizing profit. This is realized by an optimal fish farming schedule. To determine the optimal schedule a mathematical model is needed. Thus, the problem belongs to Operations Research.

Both approaches will be explained step by step and the necessary definitions and theorems will be provided.

In the end the aim is to specify one/the optimal solution.

Several papers and thesis by different authors form the basis of this Bachelor thesis. The task is to retrace their approaches. Therefore, it is necessary to perform auxiliary calculations. The main focus is on mathematical correctness.

Furthermore, totally own approaches will be made at given point.

Zusammenfassung

Inhalt dieser Bachelorarbeit sind Optimalsteuerungsprobleme und mögliche Lösungsansätze. Es wird ein Problem aus der Biologie mit ökonomischer Anwendung betrachtet und versucht, es zum einen mit dem Maximumprinzip von Pontryagin und zum anderen mithilfe des Integralsatzes von Green zu lösen.

Das zu untersuchende Optimalsteuerungsproblem betrifft die Fischzucht. Wie in den Wirtschaftswissenschaften üblich, geht es darum, den Gewinn zu maximieren. Dies soll durch einen optimalen Befischungsplan realisiert werden. Um diesen Plan zu bestimmen, wird ein passendes mathematisches Modell benötigt, auf dem die Entscheidungsfindung aufbaut. Es handelt sich also um eine Aufgabenstellung aus dem Bereich Operations Research.

Beiden Lösungswegen wird zunächst ein Gerüst aus mathematischen Definitionen und Sätzen zugrunde gelegt. Darauf aufbauend wird das jeweilige Vorgehen Schritt für Schritt erklärt.

Ziel ist es, am Ende der Untersuchungen eine/die optimale Lösung direkt anzugeben.

Dieser Bachelorarbeit liegen weitere Arbeiten von unterschiedlichen Autoren zugrunde. Die Aufgabe besteht zunächst darin, die Vorgehensweisen nachzuvollziehen. Dazu müssen nicht durchgeführte Nebenrechnungen eigenständig erarbeitet werden. Dabei wird vor allem auf mathematische Korrektheit geachtet.

Darüber Hinaus werden an gegebener Stelle gänzlich eigene Lösungsansätze verfolgt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Was sind Optimalsteuerungsprobleme?	1
1.2	Problemstellung	1
1.3	Vorgehen zur Lösung des Problems	4
2	Lösung mit dem PMP	5
2.1	Grundlagen	5
2.1.1	Die Hamilton-Funktion	5
2.1.2	Das PMP	8
2.1.3	Die Transversalitätsbedingungen	8
2.2	Freier Endzustand	11
2.3	Fester Endzustand	14
3	Lösung mit Greens Integralsatz	18
3.1	Fester Endzustand	18
3.2	Freier Endzustand: Notwendige Optimalitätsbedingung	27
3.3	Freier Endzustand: Weiterführende Überlegungen	33
3.3.1	Hinreichende Optimalitätsbedingung	33
3.3.2	Vergleich der Trajektorien mittels Greens Integralsatz	35
3.3.3	Direkter Vergleich der Trajektorien	37
4	Abschließende Bemerkungen	40
4.1	Ausblick: Die Turnpike-Eigenschaft	40
4.2	Erkenntnisse	41
A	Anmerkung zu 3.2.2	43
	Literaturverzeichnis	44
	Abbildungsverzeichnis	46

1 Einleitung

1.1 Was sind Optimalsteuerungsprobleme?

Das Problem der optimalen Steuerung ist Teil der Optimierung, wobei nicht über einem endlichdimensionalen Vektorraum, sondern über einem Funktionenraum optimiert wird. In den Nebenbedingungen treten dabei Differentialgleichungen auf.

In der Systemtheorie geht es darum, komplexe Strukturen wie zum Beispiel Organismen, einen Biogasturmreaktor oder das Sonnensystem zu untersuchen. Solche Systeme werden in der Regel durch Differentialgleichungen modelliert. Nun reicht es in vielen Fällen nicht aus, das System nur zu beobachten. Man möchte Einfluss darauf nehmen und den Zustand des Systems durch einen geeigneten Input - die Steuerung - beeinflussen. Bei Optimalsteuerungsproblemen geht es darum, die bestmögliche Steuerung zu finden. In der Regel soll dazu eine Kostenfunktion minimiert werden.

Optimalsteuerungsprobleme finden vor allem Anwendung in den Ingenieurwissenschaften. Ein beliebtes Beispiel, um das Prinzip der optimalen Steuerung zu verdeutlichen, ist das Raketenauto, vergleiche [MS82]. Hierbei geht es darum, ein mit zwei entgegengesetzt gerichteten Raketen angetriebenes Fahrzeug, das sich auf einer gewissen Anfangsposition mit einer Anfangsgeschwindigkeit befindet, zu einer gewünschten Endposition mit (eventuell ebenfalls vorgegebener) Endgeschwindigkeit zu steuern. Die optimale Steuerung hängt von der entsprechenden Zielfunktion ab. Man könnte beispielsweise verlangen, dass der Endpunkt möglichst schnell erreicht wird oder dass der Kraftstoffverbrauch minimiert wird. Dementsprechend ändert sich die optimale Steuerung.

Weitere Beispiele sind der Fliehkraftregler, der bereits 1788 von James Watt entwickelt wurde [Leo01], und diverse Stabilitätsprobleme [Loc01].

Man kann sich vorstellen, dass es in der Physik eine Vielzahl von Verwendungsmöglichkeiten gibt. Doch auch in der Ökonomie gewinnt die Untersuchung von Optimalsteuerungsproblemen zunehmend an Bedeutung. Es gibt verschiedene mathematische Modelle zu unterschiedlichen Problemstellungen, die man mit unterschiedlichen Herangehensweisen lösen kann.

1.2 Problemstellung

Im Folgenden wollen wir uns einem konkreten OCP mit vorgegebener Endzeit widmen und versuchen, es zu lösen. Dabei werden wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Wir haben einen festen Endzustand vorgegeben, der erreicht werden muss.
2. Wir können das OCP unabhängig vom Endzustand lösen.

Das OCP, welches wir betrachten werden, betrifft die Fischzucht. Unsere Steuerung beschreibt dabei den Fischfang. Ziel wird es sein, eine Steuerung zu finden, mit deren Hilfe der durch die Fischzucht erzielte Gewinn maximiert wird.

Zunächst einmal müssen wir das oben erwähnte Problem in mathematische Formeln übersetzen. Der belgische Mathematiker Pierre François Verhulst (1804-1849) hat hierzu ein nützliches Populationsmodell eingeführt [Heu91, S.22ff]. Er betrachtet die Population $x = x(t)$ einer Spezies in einem geschlossenen System zur Zeit $t \geq 0$, in unserem Beispiel also Fische in einem Teich. Er geht davon aus, dass die Population durch Umwelteinflüsse beschränkt ist. Sollte sie beispielsweise so stark wachsen, dass nicht genügend Nahrung oder Lebensraum vorhanden ist, so würde sie auf natürliche Art wieder abnehmen. Dieses ökologische Gleichgewicht kann gewissermaßen als mögliche Maximalkapazität interpretiert werden und sei im Folgenden mit x_g bezeichnet. Verhulst unterstellt, dass die Wachstumsrate der Spezies sowohl zur momentan vorhandenen Population x als auch zu der noch zur Verfügung stehenden Kapazität $x_g - x$ proportional ist. Diese Überlegungen motivieren Verhulsts Populationsmodell, welches auch als logistisches Wachstumsmodell bezeichnet wird:

$$\dot{x} = \alpha(x_g - x)x, \quad x(0) = x^0, \quad (1.1)$$

wobei $\alpha > 0$ die Wachstumsrate repräsentiert und x^0 der Fischbestand am Anfang t_0 des betrachteten Zeitraums ist. Die Differentialgleichung (1.1) ist nichtlinear und, da sie zeitinvariant ist, können wir ohne Einschränkung $t_0 = 0$ setzen.

Wie man leicht sieht, hat (1.1) genau zwei Ruhelagen: $x \equiv 0$ und $x \equiv x_g$. Des Weiteren ist $x \equiv x_g$ lokal attraktiv, d.h.,

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x^0 \in U_\varepsilon(x_g) : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x^0) = x_g.$$

In diesem Modell reicht es aus, dass $x^0 > 0$ ist, also überhaupt Fische im Teich sind, damit sich (zumindest in unendlicher Zeit) das Gleichgewicht einstellt. Ein weiterer interessanter Effekt ist, dass für $x < x_g/2$ nicht nur \dot{x} sondern auch \ddot{x} größer als Null ist, d.h., die Population nimmt schnell zu, während \ddot{x} für $x > x_g/2$ negativ ist, und das Wachstum ständig weiter sinkt. Man sagt, die Population erleide bei $x_g/2$ einen Vitalitätsknick.

Unser Beispiel handelt von der Optimierung der Fischzucht. Deshalb müssen wir die Dynamik aus Verhulsts Modell noch um eine Steuerung $u = u(t)$ erweitern, die den Fischfang zum Zeitpunkt $t \geq 0$ widerspiegelt. Wir übernehmen den Ansatz von Cliff und Vincent [CV73], die sich wiederum auf Forschungsergebnisse von Goh [Goh70] stützen, und lassen u wie folgt in die Dynamik einfließen:

$$\dot{x} = \alpha x(x_g - x) - ux, \quad x(0) = x^0. \quad (1.2)$$

Indem wir die Steuerung u mit der Population x multiplizieren, unterstellen wir, dass die gefangene Menge an Fisch proportional zur Gesamtmenge ist. Diese Annahme ist durchaus gerechtfertigt, da bei gleichem Arbeitsaufwand einen höheren Fang erwartet werden kann, wenn mehr Fische im Teich sind. Sicherlich ist es auch sinnvoll, u zu beschränken, etwa durch $0 \leq u(t) \leq M$ für ein $M > 0$, um das Modell etwas realistischer zu gestalten. Der Fall, dass von Anfang an keine Fische im Teich sind, ist uninteressant, da $x \equiv 0$ auch eine Ruhelage von (1.2) ist. Deshalb gehen wir im Folgenden von $x^0 > 0$ aus.

Unsere Aufgabe ist es nun, den Gewinn aus der Fischzucht zu maximieren. Seien hierzu $t_f > 0$ die Endzeit des betrachteten Zeitraums (beispielsweise das Pachtende des Teiches), ax die Bewirtschaftungskosten des Teiches, bu die Kosten für den Fischfang und cxu der Umsatzerlös aus dem Verkauf der Fische. Dann hat unser Gewinnfunktional die Form

$$\tilde{J}(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} -ax(t) - bu(t) + cx(t)u(t) dt.$$

Da es mathematisch keinen Unterschied macht, ob wir den Gewinn maximieren oder die Kosten minimieren, wollen wir im Folgenden das Kostenfunktional

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} ax(t) + bu(t) - cx(t)u(t) dt. \quad (1.3)$$

minimieren. Die Konstanten a, b und c sind dabei größer oder gleich 0. Wir wollen davon ausgehen, dass die gefangenen Fische auch wirklich verkauft werden. Deshalb sei $c > 0$. In Anlehnung an Kapitel 2 und da wir sie später benötigen werden, wollen wir nun noch die Menge der zulässigen Steuerungen für unser OCP angeben. Sei hierfür das Intervall $\Omega = [0, M] \subseteq \mathbb{R}$, die Menge der möglichen Steuerwerte. Dann ist

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}[0, t_f] = \{ u : [0, t_f] \rightarrow \Omega \mid u(\cdot) \text{ messbar} \}$$

die Menge der zulässigen Steuerungen.

Bemerkung 1.1. Der Teich kann entsprechend der Dynamik (1.2) in endlicher Zeit nicht leergefischt werden, denn mit $x(t) \leq x_g$ gilt

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)(x_g - x(t)) - u(t)x(t) \geq -u(t)x(t) \geq -Mx(t)$$

und aus Lemma 3.4 in [Kha02] folgt somit

$$x(t) \geq e^{-Mt}x^0 > 0 \quad \forall t \geq 0$$

für den Fischbestand.

Mit ähnlichen Überlegungen sieht man ein, dass auch der Gleichgewichtszustand x_g nicht in endlicher Zeit erreicht werden kann. Es gilt:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)(x_g - x(t)) - u(t)x(t) \leq \alpha x(t)(x_g - x(t)).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung entspricht gerade dem logistischen Wachstum. Die Lösung (vgl. [Grü15])

$$x(t) = \frac{x_g}{1 + \left(\frac{x_g}{x^0} - 1\right) e^{-\alpha x_g t}}$$

für das logistische Wachstum erreicht jedoch den Zustand x_g für $x^0 \neq x_g$ nicht in endlicher Zeit. Somit können wir bei allen weiteren Betrachtungen $x(t) \in (0, x_g)$ für alle $t \geq 0$ voraussetzen. \diamond

1.3 Vorgehen zur Lösung des Problems

In Abschnitt 1.2 haben wir ein OCP aus der Ökonomie mit endlichem Zeithorizont modelliert. Für die Lösung werden wir verschiedene mathematische Techniken nutzen. In Kapitel 2 errichten wir ein Fundament aus Definitionen, um ein Hilfsmittel erklären und schließlich anwenden zu können - Pontryagins Maximumprinzip (PMP). In Kapitel 3 werden wir einen Lösungsweg wählen, der sich auf den Satz von Green stützt. Auch hier geben wir im Voraus alle nötigen Definitionen und Sätze an. Im 4. und letzten Kapitel dieser Arbeit, fassen wir unsere Ergebnisse zusammen und geben noch einen kleinen Ausblick, was passiert, wenn man den Endzeitpunkt immer wieder vergrößert, also letztlich das OCP auf einem unendlichen Zeitintervall betrachtet.

2 Lösung mit dem PMP

Das Maximumprinzip von Pontryagin (PMP) ist ein Satz aus der Theorie der Optimalsteuerungsprobleme. Er geht zurück auf den russischen Mathematiker Lew Semjonowitsch Pontryagin (1908-1988). Es liefert notwendige Bedingungen an die optimale Steuerung und schränkt somit die Auswahl möglicher Kandidaten ein.

Wir werden in diesem Kapitel das PMP erklären und anschließend auf unser OCP aus Abschnitt 1.2 anwenden.

2.1 Grundlagen

Um im Folgenden Missverständnisse zu vermeiden, müssen wir uns, wie in der Mathematik üblich, auf Begrifflichkeiten einigen, die immer wieder verwendet werden. Deshalb wollen wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels die grundlegenden Definitionen, die wir zur Erklärung des Maximumprinzips benötigen, einführen. Anschließend werden wir das PMP einmal in seiner grundlegenden und einmal in einer erweiterten Form angeben, die wir später verwenden werden.

2.1.1 Die Hamilton-Funktion

Wesentlicher Bestandteil des PMP ist die sogenannte Hamilton-Funktion, welche wir in diesem Unterabschnitt definieren wollen. Zunächst werden wir eine allgemeine Definition des Begriffs Optimalsteuerungsproblem angeben. Da jedes Maximierungsproblem einfach in ein äquivalentes Minimierungsproblem überführt werden kann, werden wir uns hier auf letztere beschränken. Wie der Name Optimalsteuerungsproblem schon vermuten lässt, müssen wir zunächst den Begriff der Steuerung erklären.

Definition 2.1 (zulässige Steuerungen). Gegeben seien eine kompakte Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ und die Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_1$. Dann ist

$$\mathcal{U}[t_0, t_1] := \{ u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega \mid u(\cdot) \text{ messbar} \}$$

die Menge der zulässigen Steuerungen auf $[t_0, t_1]$. Spielt die Endzeit keine Rolle, so betrachten wir die Menge aller zulässigen Steuerungen

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}(t_0) := \bigcup_{t_1 > t_0} \mathcal{U}[t_0, t_1].$$

◇

Bei unserem Einleitungsbeispiel Raketensystem wird keine konkrete Endzeit vorgegeben. Sie hängt von der Wahl der Steuerung ab. Sollte man beispielsweise versuchen, das Raketensystem schnellstmöglich auf die gewünschte Position zu steuern, so wird sich eine andere Endzeit einstellen, als wenn man den Kraftstoffverbrauch minimieren möchte. Bei dem OCP aus Abschnitt 1.2 ist eine feste Endzeit vorgegeben. Deshalb wollen wir die folgenden Betrachtungen auf diesen Spezialfall reduzieren.

Definition 2.2 (Optimalsteuerungsproblem (OCP), erfolgreiche Steuerung). Gegeben seien (feste) Zeitpunkte $0 \leq t_0 < t_f$, eine Funktion $f_0 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und eine n -dimensionale Dynamik $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ mit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei f, f_0 stetig und in $x \in \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar seien. Ein OCP hat die Form

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad \text{u.d.N. } \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x^0, x(t_f) \in \mathcal{T}(t_f),$$

mit Anfangszustand $x^0 \in \mathbb{R}^n$, Zielmenge $\mathcal{T}(t_f) \subseteq \mathbb{R}^n$ und Kostenfunktion $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Des Weiteren nennen wir eine Steuerung $u \in \mathcal{U}$ *erfolgreich*, wenn sie den Anfangszustand in die Zielmenge überführt. \diamond

Zur Lösung eines OCP gehört also nicht nur die entsprechende Lösung $x^*(\cdot)$ der Dynamik, sondern auch die Steuerung $u^*(\cdot)$, die das Kostenfunktional minimiert. Wir sprechen kurz vom *Lösungspaar* (x^*, u^*) .

Bemerkung 2.3. Da wir es im Laufe dieser Arbeit nicht immer nur mit einer Steuerung, einer Anfangszeit oder einem Anfangszustand zu tun haben werden, wollen wir dies, falls nötig, bei der Bezeichnung der Trajektorien berücksichtigen. Die durch den Anfangswert x^0 zum Startzeitpunkt t_0 und die Steuerung $u(\cdot)$ eindeutig bestimmte Trajektorie bezeichnen wir mit $x(\cdot; t_0, x^0, u)$.

Mit der Formulierung $x(\cdot; x^0, u)$ unterstellen wir implizit, dass der Startzeitpunkt $t_0 = 0$ ist. Sollte die Steuerung einen konstanten Wert $S \in \Omega$ haben, schreiben wir kurz $x(\cdot; t_0, x^0, S)$. \diamond

Unser Anwendungsbeispiel gehört zu einer besonderen Klasse von Optimalsteuerungsproblemen, da es sich um ein so genanntes *autonomes System* handelt.

Definition 2.4 (autonomes System). Wir nennen das System aus Definition 2.2 *autonom*, wenn sowohl die Dynamik als auch die Kostenfunktion zeitinvariant sind, d.h., falls

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

gilt und der Integrand der Kostenfunktion die Form $f_0(x(\cdot), u(\cdot))$ hat. \diamond

Im Zusammenhang mit OCPs ist es oft von Interesse, welche Werte ausgehend von einem Anfangszustand durch entsprechende Wahl der Steuerung überhaupt angenommen werden können.

Definition 2.5 (erreichbare Menge). Gegeben sei eine Dynamik $\dot{x} = f(x, u)$ und ein beliebiger Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathcal{R}(x^0) := \{ x(t; x^0, u) \mid t \geq 0, u \in \mathcal{U} \}$$

die von x^0 *erreichbare Menge*. Legen wir Wert darauf, dass die Menge in einer gewissen Zeit erreicht wird, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{R}(t, x^0) := \{ x(t; x^0, u) \mid u \in \mathcal{U} \}$$

die von x^0 *zum Zeitpunkt t erreichbare Menge*. \diamond

Ähnlich wie die erreichbare Menge, spielt auch die Menge der Punkte, die in einen gewünschten Endzustand überführt werden können, eine wichtige Rolle.

Definition 2.6 (nach x^f steuerbare Menge). Gegeben sei eine Dynamik $\dot{x} = f(x, u)$ und $x^f \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathcal{C}(x^f) := \{ x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \geq 0, u \in \mathcal{U} : x(t; x^0, u) = x^f \}$$

die *nach x^f steuerbare Menge*. Auch hier können wir die Menge einschränken auf die Punkte, die in einer gewissen Zeit in x^f steuerbar sind. In dem Fall schreiben wir

$$\mathcal{C}(t, x^f) := \{ x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathcal{U}[0, t] : x(t; x^0, u) = x^f \}.$$

◇

Bemerkung 2.7. In Anlehnung an die nachfolgenden Abschnitte schreiben wir für den Zustand $x(t_f)$ zum Zeitpunkt $t_f > 0$ kurz x^f .

◇

Um das PMP einzuführen, benötigen wir noch weitere Hilfsmittel. Wir betrachten wieder ein OCP der Form (2.1) und erweitern unseren Zustandsvektor x um die Kostenkomponente x_0 wie folgt

$$\widehat{x}(t) := \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t f_0(x(s), u(s)) \, ds \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.2)$$

und dementsprechend

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{f}(x, u) := \begin{pmatrix} f_0(x, u) \\ f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Hiermit verändert sich auch unsere Zielmenge $\mathcal{T}(t_f)$ zu

$$\widehat{\mathcal{T}}(t_f) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ x^f \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{R}, x^f \in \mathcal{T}(t_f) \right\}. \quad (2.4)$$

Ziel ist es also, den Kostenanteil ξ zu minimieren. Als nächstes benötigen wir das adjungierte System.

Definition 2.8 (Adjungierte). Gegeben sei ein OCP mit erweitertem Zustandsvektor wie in (2.2) bis (2.4). Dann bezeichnen wir das $(n + 1)$ -dimensionale lineare System

$$\dot{\widehat{w}}(t) = -\widehat{f}_{\widehat{x}}(x(t), u(t))^\top \widehat{w}(t) \text{ fast überall} \quad (2.5)$$

als *adjungiertes System*. Hierbei setzt sich \widehat{w} in Analogie zu \widehat{x} aus der Komponente w_0 und dem n -dimensionalen Vektor $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ zusammen. Eine Lösung von (2.5) heißt *erweiterter Co-Zustand*.

◇

Nun können wir uns der Hamilton-Funktion zuwenden.

Definition 2.9 (Hamilton-Funktion). Die *Hamilton-Funktion* zu (2.2), (2.3) und (2.5) ist definiert durch

$$H(\hat{w}, x, u) := \langle \hat{w}, \hat{f} \rangle = \sum_{j=0}^n w_j(t) f_j(x(t), u(t)). \quad (2.6)$$

◇

2.1.2 Das PMP

Jetzt haben wir alle nötigen Mittel zur Hand, um uns ohne weitere Umschweife dem PMP zu widmen.

Satz 2.10 (Pontryagins Maximumprinzip). [MS82, S.108f] *Wir betrachten (2.2) bis (2.4) mit optimaler Steuerung $u^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann existiert eine absolut stetige Funktion $\hat{w}(\cdot)$, die (2.5) auf $[t_0, t_*]$ fast überall erfüllt und darüber hinaus den folgenden Eigenschaften genügt:*

- (a) $H(\hat{w}(t), x^*(t), u^*(t)) = \sup_{v \in \Omega} H(\hat{w}(t), x^*(t), v)$ fast überall
- (b) $H(\hat{w}, x^*, u^*) \equiv 0$ auf $[t_0, t_f]$
- (c) $w_0(t) \equiv w_0(t_0) \leq 0$ und $\hat{w}(t) \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \forall t \in [t_0, t_f]$,

wobei $x^* = x(\cdot; t_0, x^0, u^*)$ ist. □

Das PMP liefert nur notwendige und keine hinreichenden Bedingungen an die optimale Steuerung. Dennoch ist es gut geeignet, um die Menge möglicher Kandidaten einzuschränken.

Es ist möglich, das PMP noch zu erweitern. Als nächstes wollen wir solch eine Erweiterung angeben, da wir sie bei der Untersuchung unseres OCPs in Abschnitt 2.2 benötigen.

2.1.3 Die Transversalitätsbedingungen

Die Transversalitätsbedingungen sind weitere notwendige Bedingungen, die helfen können, eine optimale Steuerung zu charakterisieren. Hierfür betrachten wir ein OCP, wobei wir den Zielzustand nicht explizit vorgeben, sondern eine ganze Menge von möglichen Zuständen zulassen, d.h., $x(t_f) \in S$ mit geeignetem $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Hierfür benötigen wir noch den Begriff der *glatten Mannigfaltigkeit*. Um diesen zu definieren, orientieren wir uns an Pontryagins Ausführungen [PBG64, S.50f].

Definition 2.11 (glatte Hyperflächen, Hyperebenen). Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar gegeben. Dann bezeichnen wir die Nullstellenmenge $S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \}$ von f als eine *Hyperfläche* des \mathbb{R}^n . Weiterhin nennen wir einen Punkt $x \in S$ mit

$\text{grad}f(x) = 0$ *singulären Punkt der Hyperfläche* S . Eine Hyperfläche, die keine singulären Punkte enthält, nennen wir *glatt*. Ist zudem f affin linear, d.h., es gilt

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \quad (2.7)$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnen wir die Hyperfläche S als *Hyperebene*. \diamond

Definition 2.12 (Normalvektor). Sei S die gemäß Definition 2.11 durch die Abbildung $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ induzierte Hyperfläche des \mathbb{R}^n . Weiter sei $x_0 \in S$ beliebig. Dann heißt $\text{grad}f(x_0)$ *Normalvektor von S in x_0* . \diamond

Da eine durch (2.7) gegebene Hyperebene S nur den Normalvektor (a_1, \dots, a_n) besitzt, ist sie durch ihn und einen beliebigen Punkt $x \in S$ eindeutig bestimmt.

Definition 2.13 (Tangentialebene, Tangentenvektor). Seien S die durch die Abbildung $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene glatte Hyperfläche des \mathbb{R}^n und $x_0 \in S$. Dann nennen wir die Hyperebene, die zu dem Punkt x_0 und dem Normalvektor $\text{grad}f(x_0)$ gehört, die *Tangentialebene der Hyperfläche S im Punkt x_0* . Synonym verwenden wir den Begriff *Tangentialebene*. Weiter nennen wir einen Vektor v mit dem Fußpunkt x_0 *Tangentenvektor der Hyperfläche S im Punkt x_0* , wenn $v \perp \text{grad}f(x_0)$ gilt. \diamond

Beispiel 2.14. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Nullstellenmenge von f ist offensichtlich die zweidimensionale Einheitskugel

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Da $\text{grad}f(x, y) = (2x, 2y)$ genau dann null ist, wenn $x = y = 0$ gilt, und weil $(0, 0)$ nicht in S liegt, ist S eine glatte Hyperfläche des \mathbb{R}^2 . Betrachten wir nun den Punkt $(x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in S$. Dann gilt:

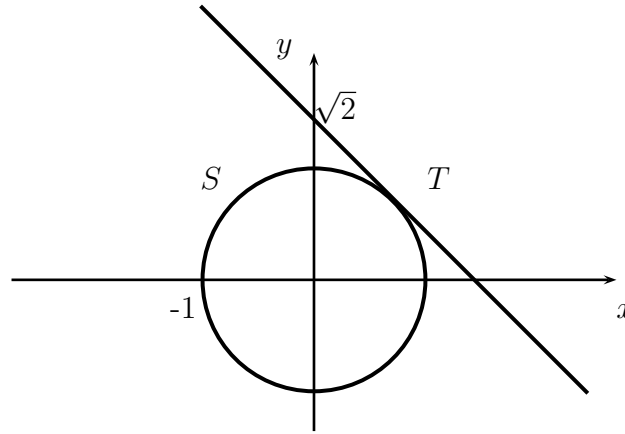
$$\text{grad}f(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \sqrt{2}(1, 1).$$

Somit entspricht die Tangentialebene T von S in (x_0, y_0) der folgenden Geraden im \mathbb{R}^2 (vgl. Abbildung 2.1)

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{2} - x, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

\diamond

Definition 2.15 (glatte Mannigfaltigkeit). Seien k glatte Hyperflächen S_1, \dots, S_k des \mathbb{R}^n durch die Gleichungen $f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0$ mit entsprechenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$, gegeben. Sind für jeden Punkt $x \in \mathcal{T}(t_f) := \bigcap_{i=1}^k S_i$ die Vektoren $\text{grad}f_1(x), \dots, \text{grad}f_k(x)$ linear unabhängig, so nennen wir $\mathcal{T}(t_f)$ eine $(n - k)$ -*dimensionale (glatte) Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n* . \diamond

Abbildung 2.1: Hyperfläche S und Tangentialebene T

Nun haben wir alle nötigen Grundlagen, um die Transversalitätsbedingungen einzuführen.

Satz 2.16 (PMP mit Transversalitätsbedingungen). [MS82] *Sei S eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension r mit $1 \leq r < n$. Wir betrachten das autonome OCP*

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t)) \, dt \text{ u.d.N. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$x(t_0) = x^0, x(t_f) \in \mathcal{T}(t_f)$$

mit dem Lösungspaar (x^*, u^*) , wobei $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in x die Kosten beschreibt und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar in x gegeben ist. Dann existiert eine stetige Funktion $\hat{w} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$, die (2.5) fast überall erfüllt und den Eigenschaften (a), (b) und (c) aus dem PMP genügt. Ist darüber hinaus T die Tangentialebene der Mannigfaltigkeit $\mathcal{T}(t_f)$ im Punkt $x(t_f)$, können wir \hat{w} so wählen, dass $w(t_f)$ senkrecht auf T steht, d.h., es gilt

$$\sum_{k=1}^n w_k(t_f) v_k = 0 \quad \forall v = (v_1, \dots, v_n) \in T.$$

□

Bemerkung 2.17. Eine analoge Aussage kann man auch für $w(t_0)$ formulieren, wenn man anstelle eines einzelnen Anfangszustands eine ganze Mannigfaltigkeit zulässt. Diese Zusatzbedingungen werden *Transversalitätsbedingungen* genannt. Für einen Beweis verweisen wir auf [LM67]. ◇

Bemerkung 2.18. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir Satz 2.16 nur für autonome Systeme formuliert haben, was im Rahmen dieser Arbeit ausreicht, da unser Anwendungsbeispiel ein OCP mit autonomer Dynamik ist. ◇

Mit Satz 2.16 haben wir alle Grundlagen, die wir brauchen, um uns unserem OCP aus Abschnitt 1.2 zuzuwenden. Aus technischen Gründen werden wir uns zuerst dem Problem mit freiem Endzustand widmen.

2.2 Freier Endzustand

Um den Überblick zu behalten, fassen wir das OCP wie folgt zusammen:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{u \in \mathcal{U}} \quad J(u) = \int_0^{t_f} ax(t) + bu(t) - cx(t)u(t) \, dt \\ \text{u.d.N.} \quad \dot{x}(t) = \alpha x(t)(x_g - x(t)) - u(t)x(t), \\ \quad \quad \quad x(0) = x^0. \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Steuerbeschränkung M groß genug ist. Was genau unter groß zu verstehen ist, werden wir an gegebener Stelle hervorheben.

Damit wir das PMP anwenden können, fügen wir die Kostenfunktion als Komponente x_0 und die Zeitkomponente x_2 zu unserer Zustandsvariable hinzu, d.h., wir erhalten das System

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t ax_1(s) + bu(s) - cx_1(s)u(s) \, ds \\ x_1(t) \\ t \end{pmatrix}$$

mit $\hat{f}(x(t), u(\cdot)) = \dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} ax_1(t) + bu(t) - cx_1(t)u(t) \\ \alpha x_1(t)(x_g - x_1(t)) - u(t)x_1(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das adjungierte System lautet dann

$$\begin{aligned} \hat{w}(t) &= -\hat{f}_{\hat{x}}(\hat{x}(t), u(t))^\top \hat{w}(t) \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a - cu(t) & -2\alpha x_1(t) + \alpha x_g - u(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0(t) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir bereits ablesen, dass $w_0(\cdot)$ und $w_2(\cdot)$ konstant sind. Als nächstes wollen wir die Transversalitätsbedingungen untersuchen. Dazu benötigen wir erst einmal die Tangentialebene an der Zielmenge $\mathcal{T}(t_f)$. Es gilt:

$$\mathcal{T}(t_f) = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ x^f \\ t_f \end{pmatrix} \middle| \eta \in \mathbb{R}, x^f \in (0, x_g) \right\}.$$

Somit ist

$$\tilde{T} = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \\ t_f \end{pmatrix} \middle| \eta, \xi \in \mathbb{R} \right\}$$

die zugehörige Tangentialebene. Da wir bei den Transversalitätsbedingungen allerdings nur Aussagen über die Komponenten w_1 und w_2 von w machen, betrachten wir auch nur die entsprechende Tangentialebene

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ t_f \end{pmatrix} \middle| \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Transversalitätsbedingungen besagen dann, dass $w(t_f) \perp T$ gelten muss, mit anderen Worten:

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1(t_f) \\ w_2(t_f) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ t_f \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere muss also für $\xi = 0$ auch $w_2(t_f) = 0$ und somit wiederum für $\xi \neq 0$ auch $w_1(t_f) = 0$ sein. Wäre $w_0(t_f) = 0$, so würde $\widehat{w}(t_f) = 0$ gelten, was im Widerspruch zum PMP steht. Da $w_0(\cdot)$ nach dem PMP konstant und kleiner oder gleich null ist, wissen wir, dass $w_0 := w_0(t) \equiv w_0(t_f) < 0$ gelten muss. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Komponente von \widehat{w} normieren. Deshalb wählen wir $w_0 = -1$. Darüber hinaus ist $w_2(t) \equiv w_2(t_f) = 0$. Somit ergibt sich für die verbleibende Komponente von \widehat{w} die lineare Differentialgleichung

$$\dot{w}_1(t) = a - cu(t) + (2\alpha x_1(t) - \alpha x_g + u(t))w_1(t). \quad (2.9)$$

Mit diesem Wissen können wir uns nun der Hamilton-Funktion H widmen. Es gilt

$$\begin{aligned} H(\widehat{w}, x, u) &= \langle \widehat{w}, \widehat{f} \rangle \\ &= -(ax_1 + bu - cx_1u) + (\alpha x_1(x_g - x_1) - ux_1)w_1 \\ &= -ax_1 + \alpha x_1(x_g - x_1)w_1 + [-(b - cx_1) - x_1w_1]u. \end{aligned}$$

Gemäß des PMPs maximiert die optimale Steuerung u^* die Hamilton-Funktion. Somit können wir u^* in Abhängigkeit von w_1 und x_1 charakterisieren:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \begin{cases} M, & \text{falls } -(b - cx_1^*(t)) - x_1^*(t)w_1(t) > 0 \\ 0, & \text{falls } -(b - cx_1^*(t)) - x_1^*(t)w_1(t) < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} M, & \text{falls } w_1(t) < c - \frac{b}{x_1^*(t)} \\ 0, & \text{falls } w_1(t) > c - \frac{b}{x_1^*(t)} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wegen Bemerkung 1.1 ist $x_1^*(t) > 0$. Betrachten wir den Spezialfall

$$w_1 = c - \frac{b}{x_1}, \quad (2.11)$$

so gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Gleichheit gilt nur zu einzelnen Zeitpunkten t_k , $k \in \mathbb{N}$.
2. Die Gleichheit gilt auf einem Intervall.

Im ersten Fall ist jedes t_k entweder ein Umschaltzeitpunkt oder die Steuerung ändert sich nicht und wir können die optimale Steuerung gemäß Formel (2.10) wählen.

Für den zweiten Fall werden wir zeigen, dass dann auf diesem Zeitintervall eine konstante Steuerung vorliegt. Indem wir die Gleichung (2.11) nach t differenzieren, erhalten wir eine zweite Darstellung für $\dot{w}_1(t)$. Gleichsetzen mit (2.9) liefert

$$\frac{b}{x_1^2} \dot{x}_1 = a - cu + (2\alpha x_1 - \alpha x_g + u) \left(c - \frac{b}{x_1} \right).$$

Um diese Gleichung nach x_1 auflösen zu können, nutzen wir die Differentialgleichung (1.2). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{x_1^2} (\alpha x_1 (x_g - x_1) - u x_1) = a - cu + (2\alpha x_1 - \alpha x_g + u) \left(c - \frac{b}{x_1} \right) \\
\Leftrightarrow & \frac{b\alpha x_g}{x_1} - b\alpha - \frac{bu}{x_1} = a - cu + 2\alpha c x_1 - \alpha c x_g + cu - 2b\alpha + \frac{b\alpha x_g}{x_1} - \frac{bu}{x_1} \\
\Leftrightarrow & -b\alpha = a + 2\alpha c x_1 - \alpha c x_g - 2b\alpha \\
\Leftrightarrow & x^s = \frac{\alpha c x_g + b\alpha - a}{2\alpha c}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Somit hängt x^s nicht mehr von der Zeit ab, d.h., für die Differentialgleichung (1.2) gilt

$$0 = \frac{d}{dt} x^s = \alpha x^s (x_g - x^s) - u^s x^s$$

und wir erhalten eine ebenfalls konstante Steuerung

$$u^s = \alpha (x_g - x^s).$$

Bemerkung 2.19. Der Fall $x^s = 0$ geht mit der Beziehung $-a + b\alpha + \alpha c x_g \leq 0$ einher und ist lediglich ein unrealistischer Spezialfall, da hierfür die Bewirtschaftungskosten $a x$ des Teiches unverhältnismäßig hoch sein müssten. In diesem Fall sollte man versuchen, die Fischpopulation so gering wie möglich zu halten, d.h., wir wählen

$$u(t) = \begin{cases} M, & \text{falls } t < t_2, \\ 0, & \text{falls } t \in [t_2, t_f], \end{cases}$$

wobei

$$t_2 = \max \{ t \geq 0 \mid \exists u : [t, t_f] \rightarrow [0, M] \text{ messbar} : x(t_f; t, x(t; 0, x^0, M), u) = x^f \}$$

der späteste Zeitpunkt ist, um x^f mit einer entsprechenden Steuerung ($u \equiv 0$) noch zu erreichen.

Im Folgenden sei deshalb $x^s > 0$ vorausgesetzt. \diamond

Der Fall $w_1 = c - b/x_1$ ist nur dann relevant, wenn u^s zulässig ist, d.h., es gilt

$$0 \leq \alpha (x_g - x^s) \leq M.$$

Bemerkung 2.20. An dieser Stelle sehen wir, was mit einer hinreichend großen Steuerbeschränkung gemeint ist. Es muss $M \geq u^s$ gelten, d.h., es soll möglich sein, durch entsprechenden Arbeitsaufwand den Fischbestand konstant auf x^s zu halten, also mindestens so viele Fisch zu angeln, wie ohne Steuerung neu dazu kommen würden. Mit einem Blick auf die Anwendung sollte dies in der Regel keine unrealistische Forderung an die Steuerung sein. \diamond

Das PMP liefert uns noch eine weitere Beziehung, die wir nutzen können. Für $u^* \equiv u^s$ auf einem Intervall muss auch $w_1 \equiv c - x^s$ auf diesem Intervall gelten und somit wegen Aussage (b) aus dem PMP:

$$\begin{aligned}
0 &= H(\hat{w}, x, u^*) \\
\Leftrightarrow 0 &= -ax_1(t) + \alpha x_1(t)(x_g - x_1(t)) \left[c - \frac{b}{x_1(t)} \right] \\
\Leftrightarrow 0 &= -ax_1(t) + \alpha cx_1(t)(x_g - x_1(t)) - \alpha b(x_g - x_1(t)) \\
\Leftrightarrow 0 &= \alpha cx_1(t)^2 + (-\alpha cx_g + a - \alpha b)x_1(t) + \alpha bx_g \\
\Leftrightarrow 0 &= x_1(t)^2 + \frac{-\alpha cx_g + a - \alpha b}{\alpha c} x_1(t) + \frac{b}{c} x_g \\
\Leftrightarrow x_1^{1,2} &= x^s \pm \sqrt{(x^s)^2 - \frac{b}{c} x_g}.
\end{aligned}$$

Die Frage ist nun, wann sich der Wert der Steuerung ändert, also wann die Gleichheit $w_1(t) = c - b/x_1(t)$ auftreten kann. Analytisch können wir diese Frage nicht beantworten, ohne weitere Anforderungen an die Parameter a, b, c, M, α und x_g zu stellen.

Beispiel 2.21. Für $b = 0$ folgt

$$x_1^1 = 2x^s \text{ und } x_1^2 = 0.$$

Da aber $x_1 \equiv x^s > 0$ gelten muss, kann $w_1 \equiv c - b/x_1$ nicht auf einem gesamten Intervall auftreten. Somit wird für $b = 0$ kein Zustand konstant gehalten. Wenn wir also davon ausgehen, dass das Fischen keine zusätzlichen Kosten bereitet, fischen wir in Abhängigkeit vom derzeitigen Fischbestand x entweder mit voller Kraft, d.h. mit $u \equiv M$, oder gar nicht ($u \equiv 0$). \diamond

2.3 Fester Endzustand

In Abschnitt 2.2 haben wir versucht die optimale Steuerung unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass wir den Endzustand frei wählen können. Dies hat es uns ermöglicht, die Transversalitätsbedingungen auszunutzen. Ohne diese zusätzlichen Voraussetzungen ist es schwer, überhaupt etwas über eine optimale Steuerung für das OCP zu sagen. Da wir diesen Fall aber ausgiebig in Abschnitt 3.1 behandeln werden, wollen wir an dieser Stelle nur einen Spezialfall betrachten, den bereits Cliff und Vincent [CV73] untersucht haben, da er eine Analyse der Umschaltzeitpunkte ohne zu großen Rechenaufwand ermöglicht und die allgemeine Vorgehensweise verdeutlicht.

Schaltzeitanalyse am Zahlenbeispiel

Wir setzen $a = b = 0$, $c = 1$ und $M = \alpha x_g = 1$. Die Differentialgleichungen für den Zustand x_1 und die Adjungierte w_1 vereinfachen sich hiermit. Da wir $x_1(t_f)$ und $w_1(t_f)$ kennen sollen, können wir entsprechende Anfangswertprobleme formulieren, indem wir

das zeitinverse System und damit verbunden die verbleibende Zeit $\theta = \theta(t) := t_f - t$ betrachten. Wegen $w_1(t_f) = 0$, der Wahl der Parameter b und c und Formel (2.10) ist der Wert von u^* auf dem letzten Teilintervall konstant $M = 1$. Also erhalten wir

$$(i) \quad \dot{z}(\theta) = \alpha z(\theta)^2 \text{ mit } z(0) = x^f \text{ und}$$

$$(ii) \quad \dot{v}(\theta) = 1 - 2\alpha z(\theta)v(\theta) \text{ mit } v(0) = 0,$$

wobei z den Zustand und v die Adjungierte des zeitinversen Systems bezeichnet. Formal kann man (i) durch Trennung der Variablen und anschließend (ii) mittels Variation der Konstanten lösen. Wir geben hier die Lösung des jeweiligen Anfangswertproblems direkt an und weisen ihre Korrektheit nach. Sei

$$z(\theta) = \frac{x^f}{1 - \alpha x^f \theta} \quad \text{und} \quad v(\theta) = \theta(1 - \alpha x^f \theta).$$

Dann gilt:

$$\dot{z}(\theta) = \frac{-x^f}{(1 - \alpha x^f \theta)^2} (-\alpha x^f) = \alpha z(\theta)^2, \quad z(0) = x^f$$

und

$$\dot{v}(\theta) = 1 - 2\alpha x^f \theta = 1 - 2\alpha \frac{x^f}{1 - \alpha x^f \theta} \theta(1 - \alpha x^f \theta) = 1 - 2\alpha z(\theta)v(\theta), \quad v(0) = 0.$$

Des Weiteren wissen wir wegen (2.10), dass $v(\theta) = 1$ gelten muss, damit wir überhaupt umschalten können. Diese Gleichung können wir nun nach θ auflösen:

$$\begin{aligned} v(\theta) = 1 &\Leftrightarrow \theta(1 - \alpha x^f \theta) = 1 \\ &\Leftrightarrow \theta^2 - \frac{1}{\alpha x^f} \theta + \frac{1}{\alpha x^f} = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta_{1,2} = \frac{1}{2\alpha x^f} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha x^f} \right). \end{aligned}$$

Hier sind nun 3 Fälle zu unterscheiden:

$$(1) \quad 1 - 4\alpha x^f < 0,$$

$$(2) \quad 1 - 4\alpha x^f = 0 \text{ und}$$

$$(3) \quad 1 - 4\alpha x^f > 0.$$

Im ersten Fall haben wir offensichtlich keinen Umschaltzeitpunkt und wegen der Beziehung $w_1(t_f) = 0 < 1 = c - b/x_1(t_f)$ und (2.10) fischen wir die ganze Zeit mit voller Kraft.

Der zweite Fall ist schon etwas interessanter. Es gilt

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha x^f} = \frac{1}{2} 4 = 2$$

und mit (2.12) folgt

$$z(\theta) = \frac{\frac{1}{4\alpha}}{1 - \alpha \frac{1}{4\alpha} 2} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{x_g}{2} = x^s.$$

Somit wäre es in diesem Fall möglich, den stabilen Zustand x^s anzusteuern. Da wir aber bereits gesehen haben, dass er für $b = 0$ nicht gehalten wird, schaltet die optimale Steuerung nicht auf u^s um. Mit $\dot{v}(2) = 0$ und $\ddot{v}(\theta) \equiv -2\alpha x^f = -0.5$ sehen wir, dass 2 ein lokales Maximum von v ist. Also behält die Steuerung u sogar den Wert M bei, d.h., auch in diesem Fall wird über den gesamten Zeitraum mit allen Mitteln gefischt. Cliff und Vincent schreiben an dieser Stelle: "[...] the candidate control may be singular after two time units from termination." [CV73, S.490], d.h., es sei möglich, auf die konstante Steuerung u^s umzuschalten. Dies steht aber im Widerspruch zu unserem Beispiel 2.21. Im dritten Fall erhalten wir

$$\alpha x^f < \frac{1}{4}$$

und somit

$$\theta = \frac{1}{2\alpha x^f} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha x^f} \right).$$

Wir betrachten nur die kleinere der beiden Lösungen, da wir die Steuerung u^* nur auf $[\theta, t_f]$ kennen, wobei θ der letzte Umschaltzeitpunkt ist. Es gilt $\theta < 2$, denn:

$$\begin{aligned} 2 &> \frac{1}{2\alpha x^f} \left(1 - \sqrt{1 - 4\alpha x^f} \right) \\ \Leftrightarrow 4\alpha x^f - 1 &> -\sqrt{1 - 4\alpha x^f}. \end{aligned}$$

Da wegen (3) beide Seiten der letzten Ungleichung kleiner als null sind, müssen wir das

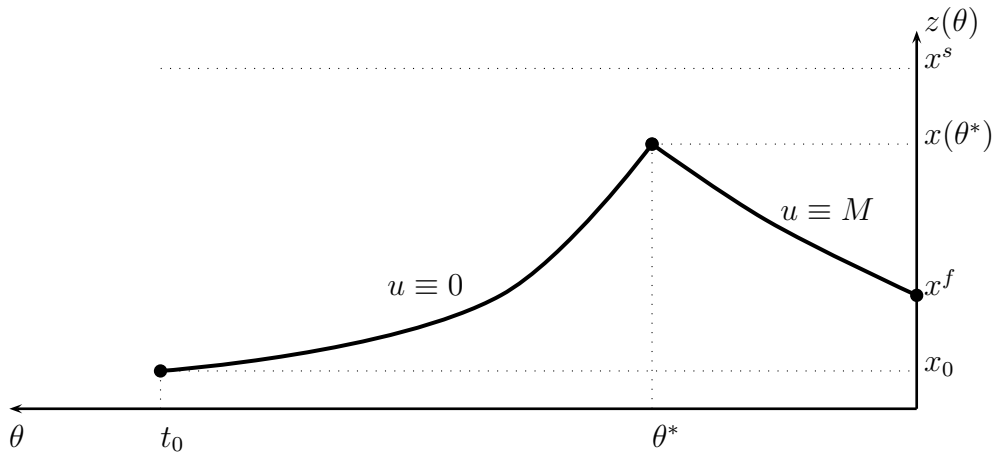


Abbildung 2.2: Zustand z in der Zeitumkehr

Relationszeichen umdrehen, wenn wir quadrieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} 16\alpha^2(x^f)^2 - 8\alpha x^f + 1 &< 1 - 4\alpha x^f \\ \Leftrightarrow 4\alpha x^f - 1 &< 0, \end{aligned}$$

was nach Voraussetzung gilt. Somit ist der Wert des Zustandes zum Zeitpunkt θ nach oben beschränkt durch:

$$z(\theta) = \frac{x^f}{1 - \alpha x^f \theta} < \frac{x^f}{1 - 2\alpha x^f} < \frac{\frac{1}{4\alpha}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{x_g}{2} = x^s. \quad (2.13)$$

Da der stabile Zustand x^s somit zum Umschaltzeitpunkt θ nicht angenommen wird und $v(\theta) > 1$ gilt, schalten wir auf 0 um. In diesem Fall können wir sogar zeigen, dass sich die Steuerung nicht noch einmal ändert. Es gilt für $u \equiv 0$:

$$\dot{v}(\theta) = (-2\alpha z(\theta) + 1)v(\theta) = (1 - 2\alpha z(\theta))v(\theta).$$

Wegen (2.13) und $v(\theta^*) = 1 > 0$ mit θ^* als letzten Umschaltzeitpunkt gilt also $\dot{v}(\theta) > 0$ für $\theta \geq \theta^*$, während $z(\theta)$ wegen $u \equiv 0$ immer weiter sinkt. Somit bleibt $v(\theta)$ immer größer als 1 und deshalb wiederum $u \equiv 0$, vergleiche Abbildung 2.2.

Im Fall (3) wird also - zur Zeit 0 beginnend - zunächst gar nicht und ab dem Umschaltzeitpunkt θ^* mit voller Kraft gefischt.

3 Lösung mit Greens Integralsatz

Wie bereits angekündigt, wollen wir nun versuchen, eine optimale Steuerung für das in 1.2 formulierte OCP mithilfe des Greenschen Integralsatzes zu finden. Der Satz von Green ist ein grundlegendes Mittel aus der Analysis, genauer aus der reellen Vektoranalysis. Er gibt eine Beziehung zwischen dem Integral einer Funktion über einem Gebiet in der zweidimensionalen reellen Ebene und dem Integral dieser Funktion entlang des Randes dieses Gebietes an. Dieser Sachverhalt wurde beispielsweise schon von Sethi und Thompson ausgenutzt, um eine optimale Steuerung für das Vidale-Wolfe-Advertising-Model zu bestimmen [ST00].

Die Idee besteht darin, zwei beliebige Steuerungen mit einander zu vergleichen, indem man nicht die Werte der Kurvenintegrale entlang der zugehörigen Trajektorien, sondern das Flächenintegral über der von den Trajektorien eingeschlossenen Fläche betrachtet. Diesen Gedanken greifen wir im Folgenden auf und übertragen die Vorgehensweise auf unser OCP. Dabei orientieren wir uns stark an einer Arbeit zur optimalen Fischzucht von Sanders [San78]. Wir greifen Ideen daraus auf, führen aber zum besseren Verständnis Beweise ausführlicher durch.

3.1 Fester Endzustand

In diesem Abschnitt werden wir das Problem der optimalen Fischzucht mit vorgegebenem Endzustand $x^f \in \mathcal{R}(t_f, x^0)$ lösen, d.h., wir müssen als weitere Nebenbedingung gewährleisten, dass zum Pachtende eine bestimmte Anzahl an Fischen im Teich vorhanden ist.

Bemerkung 3.1. Ob überhaupt eine erfolgreiche Steuerung für dieses OCP existiert, ist leicht zu sehen, da für die erreichbare Menge

$$\mathcal{R}(t_f, x^0) = [x(t_f; x^0, M), x(t_f; x^0, 0)]$$

gilt. ◇

Um den Unterschied zu (2.8) zu verdeutlichen, formulieren wir das OCP mit festem Endpunkt wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{u \in \mathcal{U}} \quad J(u) = \int_0^{t_f} ax(t) + bu(t) - cx(t)u(t) \, dt \\ \text{u.d.N.} \quad \dot{x}(t) = \alpha x(t)(x_g - x(t)) - u(t)x(t), \\ \quad \quad \quad x(0) = x^0, \\ \quad \quad \quad x(t_f) = x^f. \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Auch bei dieser Betrachtung müssen wir die Steuerbeschränkung M als hinreichend groß voraussetzen.

Um den Satz von Green noch einmal ins Gedächtnis zu rufen, brauchen wir zunächst noch einige Begrifflichkeiten.

Definition 3.2 (geschlossener Weg, Kurve, Jordan-Bogen, stückweise glatt). Es seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt γ *Weg im \mathbb{R}^n mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$* . Das Bild $\Gamma := \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [a, b] \}$ von γ nennen wir *Kurve im \mathbb{R}^n* . Gilt weiterhin $\gamma(a) = \gamma(b)$, so ist γ ein *geschlossener Weg*. Einen geschlossenen Weg, der auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$ injektiv ist, nennen wir *Jordan-Bogen*. Ein Weg γ heißt *glatt*, wenn γ eine C^1 -Funktion ist (d.h., γ ist stetig und $\gamma|_{(a,b)}$ ist stetig differenzierbar). Ist $Z = \{ a = t_0, t_1, \dots, t_k = b \}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ für ein $k \in \mathbb{N}$, sodass γ auf $[t_i, t_{i+1}]$ glatt ist, $i = 0, \dots, k-1$, so nennen wir γ *stückweise glatt*. \diamond

Definition 3.3 (Kurvenintegral). Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion mit Bild Γ und $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann nennen wir

$$\int_{\Gamma} \langle f(x), dx \rangle := \int_a^b \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds \quad (3.2)$$

Kurvenintegral von f längs Γ , wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n ist. \diamond

Bemerkung 3.4. Die Schreibweise $\langle f(x), dx \rangle$ ist an das Skalarprodukt der rechten Seite von (3.2) angelehnt. Im niedrig-dimensionalen Fall werden wir den Ausdruck $\int_{\Gamma} \langle f(x), dx \rangle$ koordinatenweise ausschreiben, also zum Beispiel für $n = 2$:

$$\int_{\Gamma} f_1(x_1, x_2) dx_1 + f_2(x_1, x_2) dx_2.$$

\diamond

Definition 3.5 (Gebiet). Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *Gebiet*, falls G offen und zusammenhängend ist. \diamond

Satz 3.6 (Satz von Green). [Apo69, S.380] *Seien S eine offene Teilmenge der (t, x) -Ebene und $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Abbildungen auf S . Weiter sei Γ das Bild eines stückweise glatten Jordan-Bogens und $\bar{G} \subseteq S$ bezeichne die Vereinigung von Γ mit dem durch Γ eingeschlossenen Gebiet G , welches nach Jordans Kurvensatz [Dom99, S.56] existiert und beschränkt ist. Dann gilt*

$$\iint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x) \right) d(t, x) = \oint_{\Gamma} f_1(t, x) dt + f_2(t, x) dx. \quad (3.3)$$

\square

Bemerkung 3.7. Integrieren wir über einem geschlossenen Weg γ mit Kurve Γ , so verwenden wir zur Verdeutlichung statt \int_{Γ} die Schreibweise \oint_{Γ} . Sofern nicht anders angegeben, gehen wir dabei stillschweigend davon aus, dass wir im mathematisch positiven Sinn, d.h., entgegen dem Uhrzeigersinn, integrieren. \diamond

Bemerkung 3.8. In der Literatur findet man (3.3) auch gelegentlich als die Green-Riemannsche Formel. Deshalb werden wir in dieser Arbeit beide Bezeichnungen äquivalent verwenden. \diamond

Als nächstes führen wir noch einen Satz an, den wir später benutzen wollen.

Satz 3.9 (Umparametrisierung von Kurvenintegralen). [Aul12, S.410] Gegeben sei ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ein stetiges Vektorfeld $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine bijektive C^1 -Funktion $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$. Dann ist auch $\delta := \gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, und es gilt

$$\int_{\Delta} \langle f(x), dx \rangle = \begin{cases} \int_{\Gamma} \langle f(x), dx \rangle, & \text{falls } \varphi(\alpha) = a \text{ und } \varphi(\beta) = b, \\ - \int_{\Gamma} \langle f(x), dx \rangle, & \text{falls } \varphi(\alpha) = b \text{ und } \varphi(\beta) = a, \end{cases}$$

wobei Γ und Δ die Bilder zu γ beziehungsweise δ sind. \square

In unserem weiteren Vorgehen wollen wir, wie bereits angedeutet, den Satz von Green nutzen, um zwei beliebige erfolgreiche Steuerungen mit einander zu vergleichen. Dafür müssen wir unsere Zielfunktion zunächst in ein Kurvenintegral transformieren.

Lemma 3.10. Seien τ und θ zwei Zeitpunkte mit $0 \leq \tau < \theta \leq t_f$ und y und z die zugehörigen Populationswerte mit $y \in \mathcal{R}(\tau, x^0)$ und $z \in \mathcal{R}(\theta - \tau, y) \cap \mathcal{C}(t_f - \theta, x^f)$. Dann betrachten wir das Kostenfunktional (1.3) in den Grenzen von τ bis θ

$$J(u; \tau, y, \theta, z) := \int_{\tau}^{\theta} ax(t) + bu(t) - cx(t)u(t) dt. \quad (3.4)$$

Weiterhin sei $u : [\tau, \theta] \rightarrow [0, M]$ eine beliebige, zulässige Steuerung, die y in z überführt und $\Gamma_u \subseteq \mathbb{R}^2$ sei der Graph zu $x(\cdot; \tau, y, u)$.

Dann gilt

$$J(u; \tau, y, \theta, z) = \int_{\Gamma_u} [ax(t) + (b - cx(t))\alpha(x_g - x(t))] dt - \frac{b - cx(t)}{x(t)} dx.$$

Beweis. Der Graph Γ_u kann als Kurve zum Weg $\gamma_u = (\gamma_1, \gamma_2)^\top : [\tau, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = t$ und $\gamma_2(t) = x(t; \tau, y, u)$ betrachtet werden. Somit gilt für die Ableitungen

$$\dot{\gamma}_1(t) = 1 \text{ und wegen (1.2) } \dot{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t) [\alpha(x_g - \gamma_2(t)) - u(t)]. \quad (3.5)$$

Desweiteren können wir γ_2 in (3.4) einsetzen:

$$J(u; \tau, y, \theta, z) = \int_{\tau}^{\theta} a\gamma_2(t) + bu(t) - c\gamma_2(t)u(t) dt.$$

Indem wir nun eine Null addieren und anschließend (3.5) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\theta} a\gamma_2(t) + bu(t) - c\gamma_2(t)u(t) dt \\ &= \int_{\tau}^{\theta} a\gamma_2(t) + (b - c\gamma_2(t))\alpha(x_g - \gamma_2(t)) - \frac{b - c\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)}\gamma_2(t) [(\alpha(x_g - \gamma_2(t)) - u(t))] dt \\ &= \int_{\tau}^{\theta} [a\gamma_2(t) + (b - c\gamma_2(t))\alpha(x_g - \gamma_2(t))] \dot{\gamma}_1(t) - \frac{b - c\gamma_2(t)}{\gamma_2(t)}\dot{\gamma}_2(t) dt. \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass wegen Bemerkung 1.1 auf $[\tau, \theta]$ stets $\gamma_2(t) > 0$ gilt. Nun müssen wir nur noch die Definition des Kurvenintegrals ausnutzen und erhalten die Behauptung. \blacksquare

Somit haben wir die Zielfunktion in ein Kurvenintegral umgeformt. In unserer Formulierung von Greens Satz wird allerdings ein Jordan-Bogen vorausgesetzt, also insbesondere ein geschlossener Weg. Sei dafür $v : [\tau, \theta] \rightarrow [0, M]$ eine weitere zulässige Steuerung mit $x(\tau; \tau, y, v) = y$ und $x(\theta; \tau, y, v) = z$, sodass die zugehörige Kurve $\Gamma_v \subseteq \mathbb{R}^2$ oberhalb von Γ_u in der (t, x) -Ebene liegt. Um einen geschlossenen Weg zu erhalten, bilden wir eine

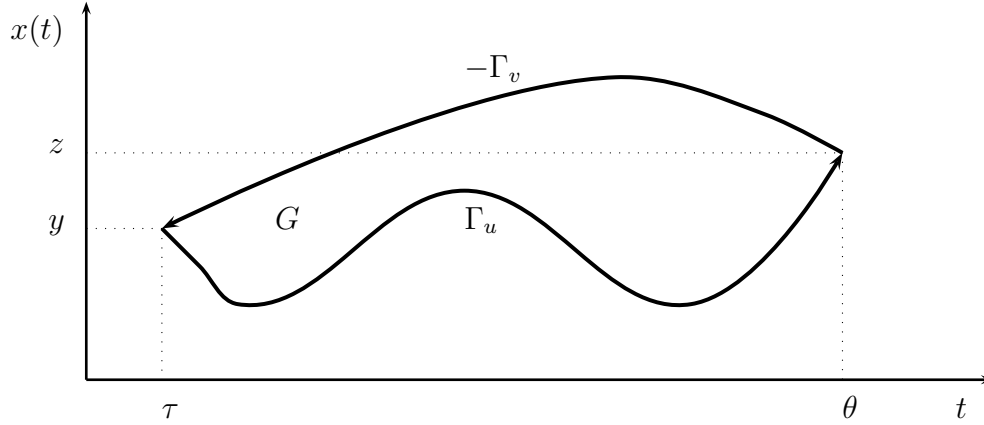


Abbildung 3.1: Gebiet G als Inneres der Kurven Γ_u und $-\Gamma_v$

neue Abbildung $\gamma : [\tau, 2\theta - \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$, indem wir zunächst die Kurve Γ_u vorwärts und im Anschluss Γ_v rückwärts durchlaufen (siehe Abbildung 3.1). Mathematisch kann man das wie folgt formulieren:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_u(t) & \text{für } t \in [\tau, \theta] \\ \gamma_v(2\theta - t) & \text{für } t \in (\theta, 2\theta - \tau] \end{cases}.$$

Die Abbildung γ ist offensichtlich stetig, da γ_u und γ_v stetig sind und $\gamma_u(\theta) = z = \gamma_v(\theta)$ gilt. Darüber hinaus ist nach Voraussetzung die Bedingung

$$\gamma_u(\tau) = y = \gamma_v(\tau) = \gamma_v(2\theta - (2\theta - \tau))$$

erfüllt. Somit ist γ ein stückweise glatter Jordan-Bogen. Wir bezeichnen das Bild von γ mit Γ und das durch Γ umrandete Gebiet in der (t, x) -Ebene mit G , d.h., $\Gamma = \partial G$. In Anlehnung an den Satz von Green benutzen wir die dort verwendeten Bezeichnungen für die Abbildungen

$$f_1(t, x(t)) := ax(t) + (b - cx(t))\alpha(x_g - x(t))$$

und

$$f_2(t, x(t)) := -\frac{(b - cx(t))}{x(t)}.$$

Weiter sei J_Γ der Wert unseres Zielfunktional entlang der Kurve Γ . Mithilfe von Satz 3.9 und $\varphi : [0, 1] \rightarrow [\tau, \theta]$ mit $\varphi(t) = t\tau + (1 - t)\theta$ erhalten wir die folgende Beziehung:

$$-J_{\Gamma_v} = J_{-\Gamma_v},$$

wobei $-\Gamma_v$ die in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve Γ_v beschreibt. Somit können wir nun den Profitunterschied zwischen Γ_u und Γ_v als Kurvenintegral über einer geschlossenen Kurve darstellen

$$J_{\Gamma_u} - J_{\Gamma_v} = J_{\Gamma_u} + J_{-\Gamma_v} = J_{\Gamma} \quad (3.6)$$

und ihn schließlich mit der Green-Riemannschen Formel wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} J_{\Gamma} &= \oint_{\Gamma} [ax(t) + (b - cx(t))\alpha(x_g - x(t))] dt - \left[\frac{b - cx(t)}{x(t)} \right] dx \\ &= \iint_G \left[\frac{\partial f_2}{\partial t}(t, x(t)) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) \right] d(t, x) \\ &= \iint_G [-a + b\alpha + c\alpha x_g - 2c\alpha x(t)] d(t, x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Um zu entscheiden, welche der beiden Kurven profitabler ist, untersuchen wir den Integranden $I := I(x(t)) := -a + b\alpha + c\alpha x_g - 2c\alpha x(t)$.

Lemma 3.11. *Ist $I(x(t)) \leq 0$ für alle $(t, x) \in G$, dann ist Γ_u mindestens so profitabel wie Γ_v ; ist hingegen $I(x(t)) \geq 0$ für alle $(t, x) \in G$, so ist Γ_v mindestens so profitabel wie Γ_u .*

Beweis. Diese Eigenschaft folgt direkt aus (3.6) und (3.7). ■

Damit wir diese Beobachtung nutzen können, suchen wir nun solche Gebiete G , auf denen $I \geq 0$ ist, und solche, auf denen $I \leq 0$ ist. Da I linear in x mit dem Koeffizienten $-2c\alpha < 0$ ist, ist I (streng) monoton fallend in x und

$$\tilde{x} = \frac{-a + b\alpha + c\alpha x_g}{2c\alpha}$$

ist die einzige Nullstelle von I . Da die Fischpopulation $x \in (0, x_g)$ sein muss, wählen wir die Projektion

$$x^s = \begin{cases} \min \{ \tilde{x}, x_g \} & \text{für } \tilde{x} > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Somit gilt $I(x(t)) \geq 0$ für $x(t) \leq x^s$ und $I(x(t)) \leq 0$ für $x(t) \geq x^s$. Ist $x(t) \equiv x^s$ konstant, so gilt

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x^s = 0$$

und wir können die zugehörige Steuerung u^s bestimmen, indem wir (1.2) nach u umstellen. Somit ist

$$u^s = \alpha(x_g - x^s)$$

ebenfalls konstant, vergleiche Bemerkung 2.20.

Bemerkung 3.12. Des Weiteren weisen wir darauf hin, dass die Werte x^s und u^s gerade mit x^s respektive u^s aus dem vorherigen Kapitel übereinstimmen und wir somit $x^s > 0$ wegen Bemerkung 2.19 voraussetzen. Auch wenn wir mit dem PMP unser OCP nicht lösen konnten, haben wir doch immerhin eine vergleichbare Struktur für die Lösung mit einem etwas geringeren Rechenaufwand herausarbeiten können. \diamond

Nun haben wir alle notwendigen Mittel zur Verfügung, um das Problem (3.1) für $M \geq u^s$ zu lösen. Den verbleibenden Teil werden wir in zwei Fälle in Abhängigkeit der Endzeit t_f unterteilen. Hierfür wollen wir uns auf folgende Sprechweise einigen. Sei t_1 die kürzeste Zeit, um vom Anfangszustand x^0 zum konstanten Zustand x^s zu gelangen, und entsprechend $t_f - t_2$ die kürzeste Zeit von x^s zum Endzustand x^f . Dann nennen wir t_f *groß*, falls $t_1 \leq t_2$ ist. Andernfalls sagen wir, t_f sei *klein*. Wir werden zeigen, dass die optimale Trajektorie so lange wie möglich entlang des konstanten Zustands x^s verläuft. Zunächst betrachten wir den Fall, dass t_f groß ist, also x^f von x^0 auch über x^s angesteuert werden kann. Da wir hierbei vier Fälle zu unterscheiden haben, führen wir weitere Abkürzungen ein, um Schreibarbeit zu sparen. Es seien die Steuerungen u_1, u_2, u_3 und u_4 definiert wie folgt:

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, t_1) \\ u^s, & \text{falls } t \in [t_1, t_2) \\ M, & \text{falls } t \in [t_2, t_f] \end{cases}, \quad u_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, t_1) \\ u^s, & \text{falls } t \in [t_1, t_2) \\ 0, & \text{falls } t \in [t_2, t_f] \end{cases}$$

$$u_3(t) = \begin{cases} M, & \text{falls } t \in [0, t_1) \\ u^s, & \text{falls } t \in [t_1, t_2) \\ M, & \text{falls } t \in [t_2, t_f] \end{cases}, \quad u_4(t) = \begin{cases} M, & \text{falls } t \in [0, t_1) \\ u^s, & \text{falls } t \in [t_1, t_2) \\ 0, & \text{falls } t \in [t_2, t_f] \end{cases}.$$

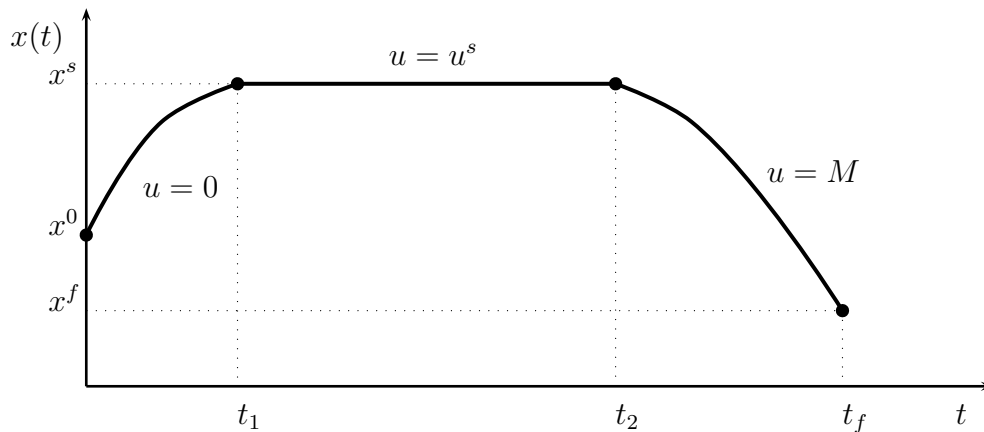
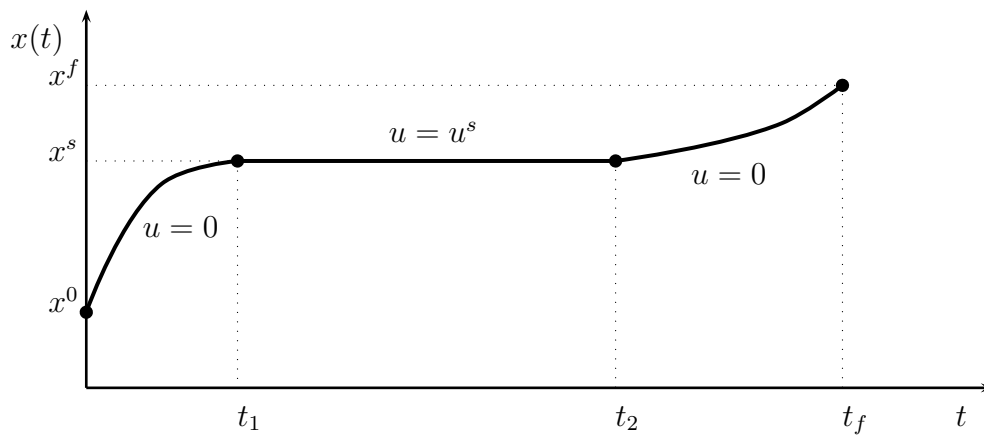
Satz 3.13. *Es sei t_f groß. Dann ist die optimale Steuerung entsprechend den Relationen von x^0 und x^f zu x^s gegeben durch:*

$$u^*(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{falls } x^0, x^f \leq x^s \\ u_2(t), & \text{falls } x^0 \leq x^s \leq x^f \\ u_3(t), & \text{falls } x^f \leq x^s \leq x^0 \\ u_4(t), & \text{falls } x^s \leq x^0, x^f \end{cases},$$

d.h., die optimale Trajektorie hat die Form wie in der jeweiligen Abbildung 3.2, 3.3, 3.4 beziehungsweise 3.5.

Beweis. Wir beweisen nur den Fall, dass sowohl x^0 als auch x^f kleiner oder gleich x^s sind. Die anderen Fälle können analog abgearbeitet werden. Wir zeigen, dass (x^*, u^*) mit $u^* = u_1$ optimal ist. Sei hierzu $\tilde{u}(\cdot)$ eine beliebige andere zulässige Steuerung, die x^0 nach x^f überführt, und $\tilde{x}(\cdot)$ die entsprechende Trajektorie, siehe Abbildung 3.6.

Wir zeigen, dass $x^*(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, t_f]$ mindestens so profitabel ist wie $\tilde{x}(t)$. Wegen der Steuerbeschränkung $u(t) \in [0, M]$ für alle $t \in [0, t_f]$ ist klar, dass sich x^* und \tilde{x} nicht auf den Intervallen $[0, t_1)$ und $(t_2, t_f]$ kreuzen können. Somit gilt auf den

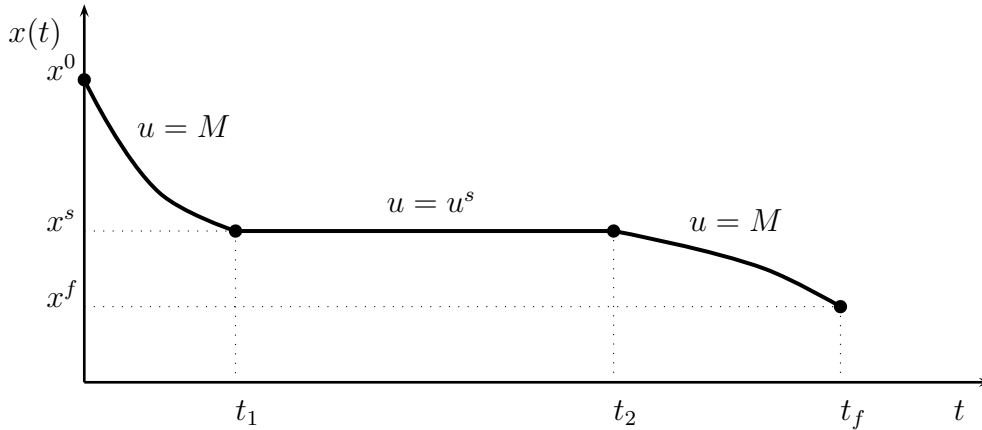
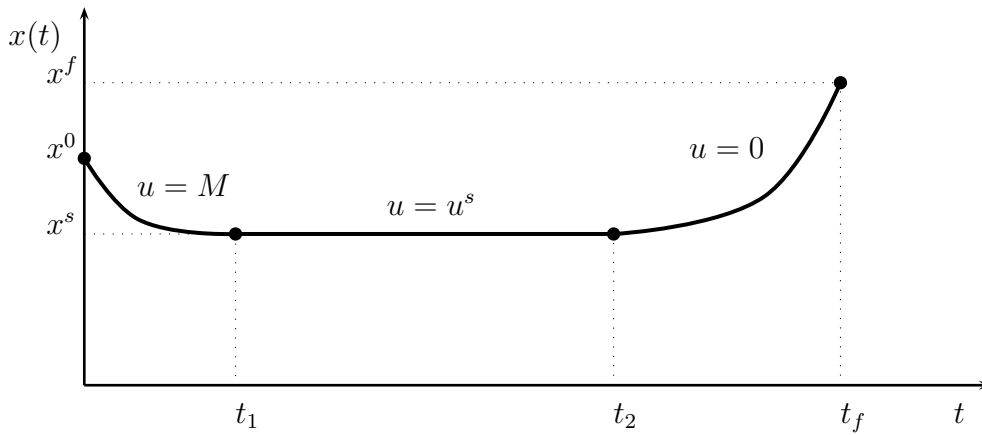
Abbildung 3.2: optimale Trajektorie für $x^0, x^f \leq x^s$ Abbildung 3.3: optimale Trajektorie für $x^0 \leq x^s \leq x^f$

beiden Intervallen $x^*(t) \geq \tilde{x}(t)$. Wir können nun das Intervall $[0, t_f]$ unterteilen, von einem Schnittpunkt von x^* mit \tilde{x} zum nächsten. Auf den Teilintervallen, auf denen die Trajektorien übereinstimmen, ist nichts zu zeigen. Auf dem Rest des Intervalls $[0, t_f]$ erhalten wir Gebiete, die entweder oberhalb oder unterhalb von x^s liegen und von den jeweiligen Abschnitten der beiden Kurven umrandet werden. Für erstere ist $I(x(t)) \leq 0$; für letztere gilt entsprechend $I(x(t)) \geq 0$. Aus Lemma 3.11 folgt, dass die zu x^* gehörige Kurve somit auf jedem dieser Teilintervalle mindestens, so profitabel ist, wie die zu \tilde{x} gehörige, d.h., das Paar (x^*, u^*) ist optimal. ■

Nun widmen wir uns dem Fall, dass t_f klein und somit x^f nicht von x^0 über x^s erreicht werden kann.

Satz 3.14. *Sei t_f klein und sei x^f erreichbar von x^0 . Dann existiert ein $t_\# \in [0, t_f]$, sodass die optimale Steuerung $u^*(\cdot)$ je nach Relation von x^0 und x^f zu x^s gegeben ist durch:*

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, t_\#), \\ M, & \text{falls } t \in [t_\#, t_f] \end{cases}$$

Abbildung 3.4: optimale Trajektorie für $x^f \leq x^s \leq x^0$ Abbildung 3.5: optimale Trajektorie für $x^s \leq x^0, x^f$

beziehungsweise

$$u^*(t) = \begin{cases} M, & \text{falls } t \in [0, t_{\#}), \\ 0, & \text{falls } t \in [t_{\#}, t_f], \end{cases}$$

d.h., die optimale Trajektorie verläuft entsprechend der Abbildung 3.7 respektive 3.8.

Beweis. Da t_f klein und x^f von x^0 erreichbar ist, muss entweder $x^s > x^0, x^f$ oder $x^s < x^0, x^f$ gelten. Wir werden uns hier wieder nur auf einen Fall konzentrieren; für den anderen kann man die Aussage analog zeigen. Sei also $x^s > x^0, x^f$. Sei weiterhin $x(\cdot; x^0, 0)$ die Trajektorie, die in x^0 startet und auf $[0, t_f]$ konstant mit $u(t) \equiv 0$ gesteuert wird. Entsprechend sei $x(\cdot; x^f, M)$ die Trajektorie, die in x^f endet und auf $[0, t_f]$ konstant mit $u(t) \equiv M$ gesteuert wird. Dann haben diese beiden Trajektorien einen Schnittpunkt unterhalb von x^s , da $t_1 > t_2$ ist, etwa $(t_{\#}, x^{\#})$ mit Zeitpunkt $t_{\#} \in [0, t_f]$ und Zustand $x^{\#} := x(t_{\#}) \in [\min \{ x^0, x^f \}, x^s)$. Wir zeigen, dass (x^*, u^*) mit

$$u^*(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, t_{\#}) \\ M, & \text{falls } t \in [t_{\#}, t_f] \end{cases}$$

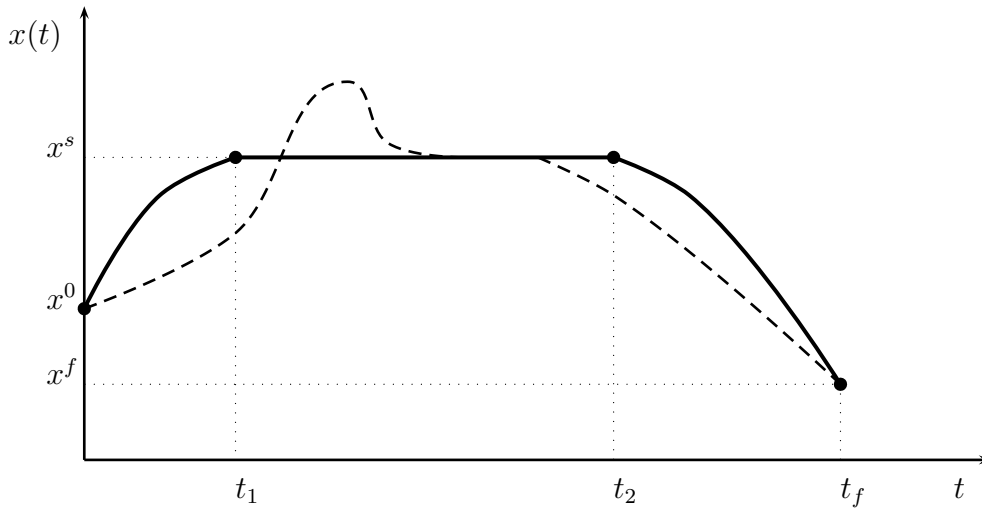


Abbildung 3.6: Vergleich optimale und beliebige Trajektorie

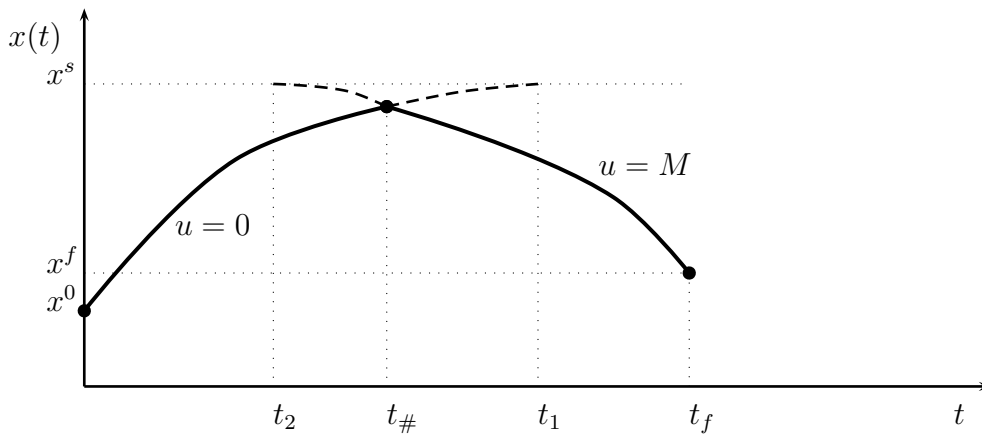
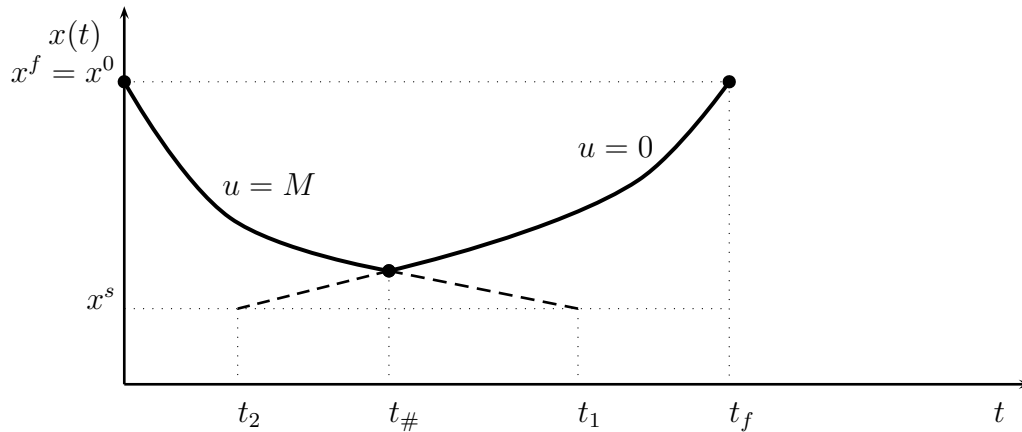


Abbildung 3.7: optimale Trajektorie für $x^0, x^f < x^s$

optimal ist.

Sei hierzu $\tilde{u}(\cdot)$ wieder eine beliebige zulässige Steuerung, die x^0 in x^f steuert und $\tilde{x}(\cdot)$ die entsprechende Trajektorie. Analog zum Beweis von Satz 3.13 können sich x^* und \tilde{x} weder auf $[0, t_\#)$ noch auf $(t_\#, t_f]$ kreuzen. Somit muss also $x^*(t) \geq \tilde{x}(t)$ auf dem gesamten Intervall $[0, t_f]$ gelten. Wenn wir uns nun wieder das von den Kurven eingeschlossene Gebiet anschauen, stellen wir fest, dass es unterhalb von x^s liegt und somit $I(x(t)) \leq 0$ gilt. Analog zu Satz 3.13 folgt mit Lemma 3.11 die Behauptung. ■

Mit den Sätzen 3.13 und 3.14 haben wir also die optimale Lösung des Problems (3.1) für die jeweiligen Fälle bestimmt, immer unter der Voraussetzung, dass M groß genug ist. Es wird in jedem Fall versucht, den konstanten Zustand x^s so lange wie möglich beizubehalten.

Abbildung 3.8: optimale Trajektorie für $x^s < x^0, x^f$

3.2 Freier Endzustand: Notwendige Optimalitätsbedingung

In diesem Abschnitt werden wir uns von dem vorgegebenen Endzustand lösen und unabhängig von der Anzahl der Fische zum Ende des betrachteten Zeitraums den Gewinn maximieren. Wir untersuchen also im Folgenden erneut das OCP (2.8). Dabei halten wir uns wieder an Sanders Vorgehensweise.

Zunächst einmal wollen wir eine notwendige Bedingung für eine Minimallösung von (2.8) angeben. Auch hier benötigen wir wieder grundlegende Werkzeuge der Analysis, wie zum Beispiel den folgenden Satz über die Differentiation von Parameterintegralen.

Satz 3.15. [Heu98, S.101f] *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ sei für alle $x \in [a, b]$, $y \in I$ definiert und sei für jedes feste $x \in [a, b]$ integrierbar auf I , sodass die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) := \int_I f(x, y) \, dy$$

wohldefiniert ist. Weiterhin sei die Funktion f für jedes feste $y \in I$ partiell nach x differenzierbar und es gebe ein $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq g(y) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ und für fast alle } y \in I.$$

Dann ist die Funktion $\partial f / \partial x$ für jedes feste $x \in [a, b]$ integrierbar auf I , die Funktion F ist differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$\frac{d}{dx} \int_I f(x, y) \, dy = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy. \quad (3.9)$$

□

Ausgehend von dieser Beziehung wollen wir uns nun eine Aussage erarbeiten, die wir später benötigen werden. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des Satzes 3.15, deren Beweis wir mit seiner Hilfe etwas abkürzen können.

Satz 3.16. *Seien $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $a(x) \leq b(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \times [a(x), b(x)] \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes feste $y \in [a(x), b(x)]$ partiell nach der ersten Komponente differenzierbar und für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ auf $[a(x), b(x)]$ nach y integrierbar. Darüber hinaus existiere eine Abbildung g wie in Satz 3.15. Dann gilt*

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, dy \right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x).$$

Beweis. Auf der linken Seite der Gleichung stehen drei Funktionen, die alle einzeln nach x differenziert werden können, während der Rest festgehalten wird. Um dies zu verdeutlichen, lassen wir in der nächsten Gleichung das x an den Stellen weg, an denen es festgehalten wird. (Im Anschluss führen wir es wieder ganz sauber mit.) Es gilt also:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, dy \right) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) \, dy + \frac{d}{dx} \int_a^{b(x)} f(y) \, dy + \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^b f(y) \, dy.$$

Das erste Integral der rechten Seite können wir mittels Satz 3.15 berechnen, während wir für die anderen beiden jeweils die Kettenregel und den Fundamentalsatz der Analysis verwenden. Dann gilt:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, dy \right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x).$$

■

Jetzt können wir uns der Optimierung der Zielfunktion zuwenden. In Abschnitt 3.1 haben wir gesehen, dass es zu jedem festen Endzustand x^f genau eine optimale Lösung von (3.1) gibt. Somit können wir J als Funktion in nur einer Veränderlichen betrachten, nämlich als $J = J(x^f)$. Ausgehend von den bisherigen Erkenntnissen liegt die Vermutung nahe, dass höchstens einmal umgeschaltet wird, da lediglich der vorgegebene Endzustand ein Verlassen des Zustandes x^s erzwungen hat.

Wir wollen zunächst einmal die Existenz einer Optimallösung nachweisen. Dazu verwenden wir den Satz von Weierstraß.

Satz 3.17 (Satz von Weierstraß). [Heu80, S.225f] *Eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Definitionsbereich X ist beschränkt und besitzt sogar ein Minimum und ein Maximum. Anders gesagt: Es gibt in X eine Minimalstelle x_1 und eine Maximalstelle x_2 , sodass*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ für alle } x \in X \text{ gilt.}$$

□

Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir zunächst zeigen, dass J stetig von x^f abhängt.

Lemma 3.18. *Die Zielfunktion J hängt stetig vom Endzustand x^f ab.*

Beweis. Sei zunächst $x_1^f \in \mathcal{R}(t_f, x^0) \setminus \{x^s\}$ beliebig, aber fest, und $x_2^f \in \mathcal{R}(t_f, x^0)$ ein weiterer möglicher Endzustand. Gemäß Definition 2.2 stelle

$$f_0(x(t), u(t)) := ax(t) + bu(t) - cx(t)u(t)$$

die Kosten zum Zeitpunkt t dar. Weiterhin sei $f^s := f(x^s, u^s)$ definiert als die Kosten für den konstanten Zustand x^s . Für gegebenen Endzustand x_i^f bezeichne τ_i den letzten Umschaltzeitpunkt, $u_i(\cdot)$ die Steuerung, die zum Zeitpunkt τ_i auf $u(x_i^f) \in \{0, M\}$ umschaltet, $x_i(\cdot)$ die zugehörige Trajektorie und $f_0^i(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$ die Kosten für $i \in \{1, 2\}$. Da für festen Endzustand x_i^f die Kosten durch den Zeitpunkt t eindeutig bestimmt sind, schreiben wir kurz $f_0^i(t)$ anstelle von $f_0^i(x_i(t), u_i(t))$. Darüber hinaus bezeichne $\Delta\tau := |\tau_2 - \tau_1|$ die Differenz der Umschaltzeitpunkte.

Wenn nun x_2^f nahe genug bei x_1^f liegt, reicht es aus, entsprechend ein bisschen früher respektive später umzuschalten, um x_2^f anstatt x_1^f anzusteuern. Mit anderen Worten: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta \in (0, |x^s - x_1^f|)$, sodass für beliebigen Endzustand x_2^f gilt:

$$|x_1^f - x_2^f| < \delta \Rightarrow \Delta\tau < \frac{\varepsilon}{|f_0^1(t_f) - f^s|} \text{ und } u(x_1^f) = u(x_2^f).$$

Sei nun $x_2^f \in (x_1^f - \delta, x_1^f + \delta)$ beliebig. Aus Symmetriegründen sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tau_2 \geq \tau_1$. Dann setzen wir f_0^2 künstlich auf $[t_f, t_f + \Delta\tau]$ wie folgt stetig zu f_0^2 fort:

$$\tilde{f}_0^2(t) = \begin{cases} f_0^2(t) & \text{für } t \in [0, t_f], \\ f_0^1(t - \Delta\tau) & \text{für } t \in (t_f, t_f + \Delta\tau]. \end{cases} \quad (3.10)$$

Wegen (3.10) und der Translationsinvarianz von x_1 und x_2 haben die Graphen von f_0^1 und \tilde{f}_0^2 auf dem Teilintervall $[\tau_1, t_f + \Delta\tau]$ horizontal den konstanten Abstand $\Delta\tau$ (vgl. Abbildung 3.9).

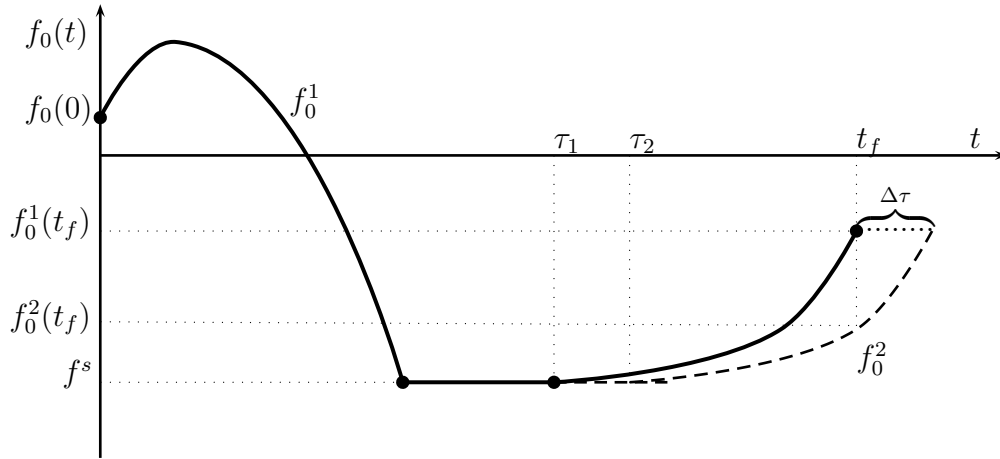
Wir betrachten nun

$$\left| J(x_1^f) - J(x_2^f) \right|. \quad (3.11)$$

Da f_0^1 und f_0^2 auf dem Intervall $[0, \tau_1]$ übereinstimmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| J(x_1^f) - J(x_2^f) \right| &= \int_{\tau_1}^{t_f} f_0^1(t) - f_0^2(t) \, dt \\ &\leq |f_0^1(t_f) - f^s| \Delta\tau \\ &< |f_0^1(t_f) - f^s| \frac{\varepsilon}{|f_0^1(t_f) - f^s|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist J stetig in x_1^f für $x_1^f \neq x^s$.

Abbildung 3.9: Kostenfunktionen f_0^1 und f_0^2

Im Fall $x_1^f = x^s$ können wir die Differenz (3.11) durch den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Kanten $[\tau_2, t_f]$ und $[f^s, f_0^2(t_f)]$ beziehungsweise $[f_0^2(t_f), f^s]$ nach oben abschätzen, da die Kostenfunktionen auf $[0, \tau_2]$ übereinstimmen. Somit gilt:

$$\begin{aligned} |J(x_1^f) - J(x_2^f)| &= \left| \int_{\tau_2}^{t_f} f^s - f_0^2(t) \, dt \right| \\ &\leq |f^s - f_0^2(t_f)| (t_f - \tau_2). \end{aligned}$$

Da beide Faktoren des letzten Terms für $x_2^f \rightarrow x^s$ gegen null streben, ist J auch stetig in x^s und die Behauptung ist gezeigt. ■

Da die Menge der möglichen Endpunkte

$$\mathcal{R}(t_f, x^0) = [x(t_f; x^0, M), x(t_f; x^0, 0)]$$

kompakt ist und J stetig von x^f abhängt, besitzt J nach dem Satz von Weierstraß ein Minimum. Es gilt nun, dieses Minimum zu bestimmen. Aus Abschnitt 3.1 ist klar, dass für $x^f = x^s$, der Endpunkt mit u^s angesteuert wird. Andernfalls wird er, je nach Relation zu x^s , mit 0 oder mit M angesteuert. Somit können wir jeden Endzustand über das Paar (τ, S) charakterisieren, wobei $\tau \in [0, t_f]$ der letzte Umschaltzeitpunkt und $S \in \{0, M\}$ der entsprechende Wert der Steuerung auf dem letzten Teilintervall $[\tau, t_f]$ ist. Wir identifizieren hierbei den möglichen Endzustand x^s sowohl mit $(t_f, 0)$ als auch mit (t_f, M) .

Als nächstes gehen wir davon aus, das Verhältnis zwischen x^s und x^f zu kennen, d.h., wir kennen den Wert von S . Somit hängt unsere Zielfunktion lediglich noch vom Umschaltzeitpunkt τ ab, d.h., es gilt $J = J(\tau)$. Sei nun \tilde{u} eine beliebige zulässige Steuerung auf $[0, t_f]$ mit $\tilde{u}(\tau) \neq S$. Dann definieren wir uns eine neue Steuerung $u^\#$, indem wir zum Zeitpunkt τ auf den Wert S umschalten, d.h.,

$$u^\#(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & \text{falls } t \in [0, \tau) \\ S, & \text{falls } t \in [\tau, t_f] \end{cases}.$$

Um mögliche Minima zu bestimmen, differenzieren wir J nach τ und verwenden hierbei den Satz 3.16. Sei dazu $x(\cdot) = x(\cdot; x^0, \tau) := x(\cdot; x^0, u^\#)$ die Lösung von (1.2), die mit dem Wert x^0 startet, mit $u^\#(\cdot)$ gesteuert wird und somit in τ den letzten Umschaltzeitpunkt hat. Weiter sei

$$y(\tau) = x(\tau, x^0, \tau)$$

der Wert dieser Lösung zum Umschaltzeitpunkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\tau}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \int_0^{t_f} ax(t) + bu^\#(t) - cx(t)u^\#(t) dt \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^\tau ax(t) + b\tilde{u}(t) - cx(t)\tilde{u}(t) dt + \int_\tau^{t_f} ax(t) + bS - cx(t)S dt \right) \\ &= \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} (ax(t) + b\tilde{u}(t) - cx(t)\tilde{u}(t)) dt + (ay(\tau) + b\tilde{u}(\tau) - cy(\tau)\tilde{u}(\tau)) \\ &\quad + \int_\tau^{t_f} \frac{\partial}{\partial \tau} (ax(t) + bS - cx(t)S) dt - (ay(\tau) + bS - cy(\tau)S) \\ &= (ay(\tau) + b\tilde{u}(\tau) - cy(\tau)\tilde{u}(\tau)) - (ay(\tau) + bS - cy(\tau)S) \\ &\quad + \int_0^\tau (a - c\tilde{u}(t)) \frac{\partial x(t)}{\partial \tau} dt + \int_\tau^{t_f} (a - cS) \frac{\partial x(t)}{\partial \tau} dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nun wollen wir den unhandlichen Ausdruck auf der rechten Seite von (3.12) noch etwas vereinfachen. Betrachten wir zunächst das erste Integral. Da die Populationsdichte x nicht vom Umschaltzeitpunkt τ abhängt, bevor tatsächlich umgeschaltet wird, gilt

$$\frac{\partial x(\cdot; x^0, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (3.13)$$

auf $[0, \tau]$. Somit verschwindet der gesamte Ausdruck. Als nächstes untersuchen wir das zweite Integral. Hierfür müssen wir die partielle Ableitung von x nach τ noch auf dem Teilintervall $[\tau, t_f]$ bestimmen. Dazu benutzen wir den folgenden Spezialfall von Satz 3.16.

Folgerung 3.19. Seien $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $a(x) \leq b(x) \forall x \in \mathbb{R}$, $f : [a(x), b(x)] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

◇

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.16, da die partielle Ableitung von f nach x verschwindet, weil f gar nicht von x abhängt. ■

Indem wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \alpha(x_g - x)x - Sx, \quad x(\tau) = y \quad (3.14)$$

auf $[\tau, t]$ für $\tau \leq t \leq t_f$ mithilfe der Trennung der Variablen lösen, erhalten wir die folgende Beziehung

$$\int_y^{x(t; x^0, \tau)} \frac{1}{x(\alpha(x_g - x) - S)} dx = t - \tau. \quad (3.15)$$

Nun differenzieren wir (3.15) mithilfe von Folgerung 3.19 nach τ und erhalten

$$\frac{\partial x(t; x^0, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{x(t; x^0, \tau)(\alpha(x_g - x(t; x^0, \tau)) - S)} - \frac{dy}{d\tau}(\tau) \frac{1}{y(\alpha(x_g - y) - S)} = -1. \quad (3.16)$$

Da $y(\tau)$ die Fischdichte zum Umschaltzeitpunkt τ angibt, besteht zwischen y und τ die gleiche Beziehung wie zwischen x und t . Somit gilt analog zu (1.2):

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \alpha y(\tau)(x_g - y(\tau)) - \tilde{u}(\tau)y(\tau). \quad (3.17)$$

Indem wir jetzt die Gleichung (3.16) mithilfe von (1.2) und (3.17) umstellen, erhalten wir die partielle Ableitung von x nach τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tau} &= \frac{\partial x}{\partial t} \left(\frac{dy}{d\tau}(\tau) \frac{1}{y(\alpha(x_g - y) - S)} - 1 \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} \left[(\alpha y(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)y) \left(\frac{1}{y(\alpha(x_g - y) - S)} \right) - 1 \right] \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} \left[\frac{\alpha(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)}{\alpha(x_g - y) - S} - 1 \right] \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} \left[\frac{S - \tilde{u}(\tau)}{\alpha(x_g - y) - S} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nun können wir (3.13) und (3.18) in (3.12) einsetzen. Somit ergibt sich die Ableitung unserer Zielfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\tau}(\tau) &= b(\tilde{u}(\tau) - S) + cy(S - \tilde{u}(\tau)) + \int_{\tau}^{t_f} (a - cS) \frac{\partial x}{\partial t}(t) \left(\frac{S - \tilde{u}(\tau)}{\alpha(x_g - y) - S} \right) dt \\ &= \left[cy - b + \left(\frac{a - cS}{\alpha(x_g - y) - S} \right) \int_{\tau}^{t_f} \frac{\partial x}{\partial t}(t) dt \right] (S - \tilde{u}(\tau)) \\ &= \left[cy - b + \frac{(x^f - y)(a - cS)}{\alpha(x_g - y) - S} \right] (S - \tilde{u}(\tau)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist, dass die Ableitung verschwindet. Da $\tilde{u}(\tau) \neq S$ ist, sehen wir, dass $dJ/d\tau$ genau dann gleich null ist, wenn

$$(cy - b)(\alpha(x_g - y) - S) + (a - cS)(x^f - y) = 0 \quad (3.20)$$

gilt. Wir haben also eine notwendige Bedingung für die Optimalität von x^f gefunden.

Bemerkung 3.20. Wenn wir uns nun noch einmal dem Zahlenbeispiel aus 2.2 widmen, vereinfacht sich die Bedingung (3.20) mit $a = b = 0$ zu

$$cy(\alpha(x_g - y) - S) - cS(x^f - y) = 0.$$

Angenommen, x^f wäre größer als x^s . Dann müsste x^f mit $S = 0$ auf dem letzten Teilintervall angesteuert werden und somit wäre

$$cy\alpha(x_g - y) = 0.$$

Da $y \in (0, x_g)$ ist und $c, \alpha > 0$ gilt, kann dieser Fall also nicht eintreten. \diamond

3.3 Freier Endzustand: Weiterführende Überlegungen

In diesem Abschnitt versuchen wir, ein hinreichendes Kriterium für die optimale Steuerung anzugeben. Zunächst untersuchen wir Sanders Vorgehen. Da wir den Ausführungen allerdings nicht bis zum Ende folgen können, stellen wir noch zwei alternative Lösungsansätze vor.

3.3.1 Hinreichende Optimalitätsbedingung

Wir wollen nun hinreichende Bedingungen für ein Minimum der Kostenfunktion bestimmen. Aus den bisherigen Informationen können wir die folgende Beziehung zwischen der verbleibenden Zeit $t_f - \tau$, dem Fischbestand y zum Umschaltzeitpunkt τ und dem Wert S der Steuerung auf dem letzten Teilintervall $[\tau, t_f]$ herleiten.

Satz 3.21. *Mit τ als letzten Umschaltzeitpunkt und S als Wert der Steuerung auf dem letzten Teilintervall $[\tau, t_f]$ gilt für (2.8) :*

$$t_f - \tau = \frac{1}{\alpha x_g - S} \ln \left[1 - \frac{(\alpha x_g - S)(cy - b)}{y((a - cS) + (cy - b)\alpha)} \right]. \quad (3.21)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$t_f - \tau = \frac{1}{\alpha x_g - S} \ln \left[\left(\frac{x^f}{\alpha(x_g - x^f) - S} \right) \left(\frac{\alpha(x_g - y) - S}{y} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Um diese Gleichheit zu überprüfen, lösen wir das Anfangswertproblem (3.14) auf $[\tau, t_f]$. Dazu führen wir eine Trennung der Variablen durch und erhalten

$$\int_y^{x^f} \frac{1}{\alpha(x_g - x)x - Sx} dx = t_f - \tau. \quad (3.23)$$

Nun müssen wir nur noch die linke Seite von (3.23) berechnen. Hierfür verwenden wir die Partialbruchzerlegung. Der Nenner $N = \alpha(x_g - x)x - Sx$ des Integranden hat die Nullstellen $x = 0$ und $x = x_g - \frac{S}{\alpha}$. Dies führt zu dem Ansatz

$$\frac{1}{(\alpha(x_g - x) - S)x} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x - (x_g - \frac{S}{\alpha})}. \quad (3.24)$$

Indem wir (3.24) mit N multiplizieren, erhalten wir

$$1 = -\alpha(a_1 + a_2)x + a_1\alpha x_g - a_1S.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a_1 = \frac{1}{\alpha x_g - S} \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{1}{\alpha x_g - S}. \quad (3.25)$$

Mithilfe von (3.24) und (3.25) können wir nun die linke Seite von (3.23) berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_y^{x^f} \frac{1}{\alpha(x_g - x)x - Sx} dx &= \int_y^{x^f} \frac{1}{(\alpha x_g - S)x} + \frac{1}{(S - \alpha x_g)(x - (x_g - \frac{S}{\alpha}))} dx \\ &= \int_y^{x^f} \frac{1}{(\alpha x_g - S)x} + \frac{1}{(S - \alpha x_g)x - (S - \alpha x_g)(x_g - \frac{S}{\alpha})} dx \\ &= \left[\frac{\ln(x)}{\alpha x_g - S} \right]_y^{x^f} + \left[\frac{\ln\left(\frac{(S - \alpha x_g)x - (S - \alpha x_g)(x_g - \frac{S}{\alpha})}{S - \alpha x_g}\right)}{S - \alpha x_g} \right]_y^{x^f} \\ &= \frac{1}{\alpha x_g - S} \ln \left[\left(\frac{x^f}{y}\right) \left(\frac{(S - \alpha x_g)y - (S - \alpha x_g)(x_g - \frac{S}{\alpha})}{(S - \alpha x_g)x^f - (S - \alpha x_g)(x_g - \frac{S}{\alpha})}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha x_g - S} \ln \left[\left(\frac{x^f}{y}\right) \left(\frac{y - (x_g - \frac{S}{\alpha})}{x^f - (x_g - \frac{S}{\alpha})}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha x_g - S} \ln \left[\left(\frac{x^f}{\alpha(x_g - x^f) - S}\right) \left(\frac{\alpha(x_g - y) - S}{y}\right) \right], \end{aligned}$$

womit der erste Teil gezeigt ist.

Als nächstes stellen wir die Gleichung (3.20) nach x^f um und erhalten

$$x^f = y - \frac{(cy - b)(\alpha(x_g - y) - S)}{a - cS}. \quad (3.26)$$

Um die Aussage (3.21) zu zeigen, müssen wir nur noch (3.26) in (3.22) einsetzen und elementare Umformungen durchführen. Da sich dabei lediglich der logarithmische Term ändert, zeigen wir hier auch nur die entsprechenden Rechenschritte. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^f}{\alpha(x_g - x^f) - S}\right) \left(\frac{\alpha(x_g - y) - S}{y}\right) &= \frac{y(\alpha(x_g - y) - S) - \frac{(cy-b)(\alpha(x_g-y)-S)^2}{a-cS}}{\left[\alpha\left(x_g - \left(y - \frac{(cy-b)(\alpha(x_g-y)-S)}{a-cS}\right)\right) - S\right] y} \\ &= \frac{y(\alpha(x_g - y) - S) - \frac{(cy-b)(\alpha(x_g-y)-S)^2}{a-cS}}{\left[\alpha(x_g - y) - S + \alpha\frac{(cy-b)(\alpha(x_g-y)-S)}{a-cS}\right] y} \\ &= \frac{y - \frac{(cy-b)(\alpha(x_g-y)-S)}{a-cS}}{y\left(1 + \frac{cy-b}{a-cS}\alpha\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y - \frac{cy-b}{a-cS}\alpha x_g + \frac{cy-b}{a-cS}S + \frac{cy-b}{a-cS}\alpha y}{y \left(1 + \frac{cy-b}{a-cS}\alpha\right)} \\
&= 1 - \frac{\frac{cy-b}{a-cS}(\alpha x_g - S)}{y \left(1 + \frac{cy-b}{a-cS}\alpha\right)} \\
&= 1 - \left(\frac{(\alpha x_g - S)(cy - b)}{(a - cS)y}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{cy-b}{a-cS}\alpha}\right) \\
&= 1 - \frac{(\alpha x_g - S)(cy - b)}{y((a - cS) + (cy - b)\alpha)}.
\end{aligned}$$

■

An dieser Stelle wird Sanders Beweisführung etwas unübersichtlich. Es wurde versucht, die Schritte nachzuvollziehen, was allerdings in einer umständlichen und schwer überschaubaren Rechnung gipfelte, die letzten Endes Sanders Ergebnis nicht untermauern konnte, vergleiche Anhang A.

Schließlich wurden weitere Lösungsansätze beruhend auf Greens Integralsatz untersucht.

3.3.2 Vergleich der Trajektorien mittels Greens Integralsatz

Unsere erste Alternative nutzt wieder den gleichen Ansatz wie in Abschnitt 3.1: Wir versuchen die Differenz der Zielfunktionswerte zu zwei unterschiedlichen Endzuständen zu vergleichen, indem wir das Integral über der eingeschlossenen Fläche betrachten. Da die Endwerte verschieden sind, bilden die zugehörigen Trajektorien noch keine geschlossene Kurve. Wir müssen sie noch um eine Hilfskurve erweitern.

In Abschnitt 3.1 haben wir festgestellt, dass die optimale Trajektorie so lange wie möglich den Zustand x^s beibehält und uns nur die Endbedingung $x(t_f) = x^f$ zwingt diesen Zustand zu verlassen. Die Vermutung liegt also nahe, dass es bei freiem Endzustand optimal ist, die Steuerung u^s und somit den Zustand x^s bis zum Endzeitpunkt t_f beizubehalten. Deshalb wollen wir im Weiteren beliebige Endzustände nur mit dem stabilen Zustand x^s vergleichen.

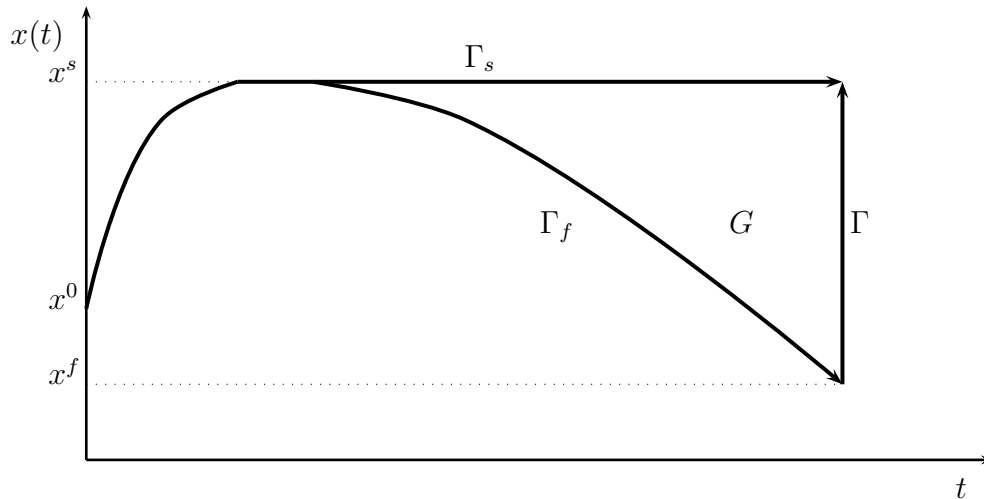
Dann gibt es wieder zwei relevante Fälle:

- Der zu vergleichende Endzustand x^f liegt unterhalb von x^s .
- Es gilt $x^s < x^f$.

Im Folgenden wollen wir nur den ersten Fall betrachten.

Dazu definieren wir uns zunächst die Hilfskurve. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{t_f\} \times [x^f, x^s]$ der durch $\gamma(t) = (t_f, tx^s + (1-t)x^f)$ definierte Weg im \mathbb{R}^2 und Γ die zugehörige Kurve. Somit gilt für die Ableitung $\dot{\gamma}(t) = (0, x^s - x^f)$. Weiter beschreibe Γ_s den Graphen, der zur Trajektorie mit Endpunkt x^s gehört, und Γ_f entsprechend den zu x^f gehörigen. Dann gilt mit dem Satz von Green und Lemma 3.11 (vgl. Abschnitt 3.1 und Abbildung 3.10):

$$J_{\Gamma_f} + J_{\Gamma} - J_{\Gamma_s} = \iint_G [-a + b\alpha + c\alpha x_g - 2c\alpha x(t)] \, d(t, x) \geq 0.$$

Abbildung 3.10: Vergleich von Γ_s und Γ_f

Um nun die Kosten der beiden Trajektorien zu vergleichen, müssen wir also J_Γ bestimmen. Analog zur Berechnung von J_Γ in Abschnitt 3.1 gilt:

$$\begin{aligned}
 J_\Gamma &= \int_\Gamma [ax(t) + (b - cx(t))\alpha(x_g - x(t))] dt - \left[\frac{b - cx(t)}{x(t)} \right] dx \\
 &= \int_0^1 f_1(\gamma(\theta))\dot{\gamma}_1(\theta) + f_2(\gamma(\theta))\dot{\gamma}_2(\theta) d\theta \\
 &= \int_0^1 - \left[\frac{b - c(\theta x^s + (1 - \theta)x^f)}{\theta x^s + (1 - \theta)x^f} \right] (x^s - x^f) d\theta \\
 &= \int_0^1 \frac{-b(x^s - x^f)}{x^f + (x^s - x^f)\theta} + c(x^s - x^f) d\theta \\
 &= [-b \ln(x^f + (x^s - x^f)\theta) + c(x^s - x^f)\theta]_0^1 \\
 &= c(x^s - x^f) - b(\ln x^s - \ln x^f).
 \end{aligned}$$

Mit $h(x^f) := c(x^s - x^f) - b(\ln x^s - \ln x^f)$ und $I(x(t)) := -a + b\alpha + c\alpha x_g - 2c\alpha x(t)$ gilt für die Kostendifferenz

$$\Delta J := J_{\Gamma_f} - J_{\Gamma_s} = \iint_G I(x(t)) d(t, x) - h(x^f).$$

Ziel ist es nun, $\Delta J \geq 0$ zu zeigen. Da wir schon wissen, dass der Wert des Integrals auf der rechten Seite für beliebiges $x^f < x^s$ größer oder gleich null ist, untersuchen wir $h(x^f)$. Es gilt:

$$\dot{h}(x^f) = -c + \frac{b}{x^f} \quad \text{und} \quad \ddot{h}(x^f) = -\frac{b}{(x^f)^2}.$$

Wie man leicht sieht, hat \dot{h} nur die Nullstelle $x^f = b/c$ und \ddot{h} ist auf $(0, x^s)$ kleiner als null. Somit hat h kein lokales Minimum in $(0, x^s)$. Weiter ist $h(x^s) = 0$. Deshalb

muss $\max \{ h(x^f) \mid x^f \in (0, x^s) \} = h(b/c) > 0$ gelten. Es reicht also nicht aus, nur h zu betrachten.

Wir können zwar h recht gut charakterisieren, kennen allerdings lediglich das Vorzeichen des Wertes des Flächenintegrals. Da dieses nichtnegativ ist, kommen wir an dieser Stelle nicht weiter.

Man könnte versuchen das Flächenintegral nach dem Endzustand zu differenzieren, um mehr über die Struktur zu erfahren. Das würde allerdings den Rahmen dieser Bachelorarbeit sprengen. Stattdessen wollen wir noch einen weiteren Ansatz zur Lösung mithilfe der Green-Riemannschen Formel verfolgen.

3.3.3 Direkter Vergleich der Trajektorien

Wie in Unterabschnitt 3.3.2 wollen wir wieder eine beliebige Trajektorie mit der Trajektorie mit Endpunkt x^s vergleichen. Wir wissen, dass sie auf dem ersten Teilintervall identisch sind, und müssen somit nur noch das letzte Teilintervall $[\tau, t_f]$ untersuchen, wobei τ der letzte Umschaltzeitpunkt der alternativen Steuerung ist. Die Idee ist, den Wert J_{Γ_f} des Integrals längs der Kurve Γ_f analog zu J_{Γ} im obigen Abschnitt zu berechnen. Damit die Rechnung etwas einfacher wird, betrachten wir eine Trajektorie mit $u \equiv 0$ auf $[\tau, t_f]$. Sei also $x^f > x^s$. Zur Berechnung des Kurvenintegrals brauchen wir den letzten Umschaltzeitpunkt τ . Dazu betrachten wir ausgehend von x^f die zeitinverse Dynamik, d.h., wir untersuchen das Anfangswertproblem

$$\dot{z} = -\alpha z(x_g - z), \quad z(0) = x^f \quad (3.27)$$

und versuchen, den Zeitpunkt $\tilde{\tau}$ zu bestimmen, sodass $z(\tilde{\tau}) = x^s$ und schließlich mit $\tau = t_f - \tilde{\tau}$ auch $x(\tau) = x^s$ gilt.

Die Dynamik (3.27) entspricht dem zeitinversen logistischen Wachstum. In Analogie zur Lösung (vgl. [Grü15])

$$x(t) = \frac{x_g}{1 + \left(\frac{x_g}{x^0} - 1\right) e^{-\alpha x_g(t-t_0)}}$$

für das logistische Wachstum können wir eine Lösung für das Anfangswertproblem (3.27) herleiten. Wir erhalten:

$$z(t) = \frac{x_g}{1 + \left(\frac{x_g}{x^f} - 1\right) e^{\alpha x_g t}}.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} z(\tilde{\tau}) &= x^s \\ \Leftrightarrow x_g - x^s &= x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1\right) e^{\alpha x_g \tilde{\tau}} \\ \Leftrightarrow \tilde{\tau} &= \frac{1}{\alpha x_g} \ln \left[\frac{x_g - x^s}{x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1\right)} \right]. \end{aligned}$$

Indem wir die Translationsinvarianz ausnutzen, können wir die Lösung auf dem letzten Teilintervall wie folgt angeben:

$$x : [0, t_f - \tau] \rightarrow [x^s, x^f], \quad x(t) = \frac{x_g}{1 + \left(\frac{x_g}{x^s} - 1\right) e^{-\alpha x_g t}}. \quad (3.28)$$

Da die Steuerung identisch null ist, reicht es aus, ax auf dem Intervall $[0, t_f - \tau]$ zu integrieren, um J_{Γ_f} zu bestimmen.

Lemma 3.22. *Die Abbildung $t \mapsto \frac{\ln(x^s(e^{\alpha x_g t} - 1) + x_g)}{\alpha}$ ist eine Stammfunktion von x , wobei x wie in (3.28) gegeben ist.*

Beweis. Um die Aussage zu zeigen, differenzieren wir einfach die gegebene Abbildung nach t . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\ln(x^s(e^{\alpha x_g t} - 1) + x_g)}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x^s(e^{\alpha x_g t} - 1) + x_g} \alpha x_g x^s e^{\alpha x_g t} \\ &= \frac{x_g}{e^{\alpha x_g t} - 1 + \frac{x_g}{x^s}} e^{\alpha x_g t} \\ &= \frac{x_g}{e^{\alpha x_g t} (1 - e^{-\alpha x_g t} + \frac{x_g}{x^s} e^{-\alpha x_g t})} e^{\alpha x_g t} \\ &= \frac{x_g}{1 + (\frac{x_g}{x^s} - 1) e^{-\alpha x_g t}}. \end{aligned}$$

■

Nun können wir diese Stammfunktion einsetzen, um das Integral auszurechnen:

$$\begin{aligned} J_{\Gamma_f} &= \int_0^{t_f - \tau} ax(t) dt \\ &= a \left[\frac{\ln(x^s(e^{\alpha x_g t} - 1) + x_g)}{\alpha} \right]_0^{t_f - \tau} \\ &= a \frac{\ln(x^s(e^{\alpha x_g t_f} e^{-\alpha x_g \tau} - 1) + x_g)}{\alpha} - a \frac{\ln(x_g)}{\alpha} \\ &= a \frac{\ln \left[x^s \left(e^{\alpha x_g t_f} \frac{x^s (\frac{x_g}{x^f} - 1)}{x_g - x^s} - 1 \right) + x_g \right]}{\alpha} - a \frac{\ln(x_g)}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Als nächstes müssen wir noch den Wert des Kurvenintegrals entlang der Trajektorie mit konstantem Zustand x^s berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} J_{\Gamma_s} &= \int_0^{t_f - \tau} ax^s + bu^s - cx^s u^s dt \\ &= (t_f - \tau)(ax^s + bu^s - cx^s u^s) \\ &= \left(t_f - \frac{1}{\alpha x_g} \ln \left[\frac{x_g - x^s}{x^s (\frac{x_g}{x^f} - 1)} \right] \right) (ax^s + bu^s - cx^s u^s). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nun wollen wir die Ausdrücke (3.29) und (3.30) noch etwas vereinfachen. Um sie anschließend besser vergleichen zu können, multiplizieren wir beide zunächst mit αx_g . Somit gilt:

$$J_{\Gamma_f} \alpha x_g = \alpha x_g \ln \left[1 + \frac{x^s}{x_g} \left(e^{\alpha x_g t_f} \frac{x^s (\frac{x_g}{x^f} - 1)}{x_g - x^s} - 1 \right) \right]$$

und

$$\begin{aligned} J_{\Gamma_s} \alpha x_g &= \left(\ln [e^{\alpha x_g t_f}] - \ln \left[\frac{x_g - x^s}{x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1 \right)} \right] \right) (ax^s + bu^s - cx^s u^s) \\ &= \ln \left[e^{\alpha x_g t_f} \frac{x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1 \right)}{x_g - x^s} \right] (ax^s + bu^s - cx^s u^s). \end{aligned}$$

Um unsere Vermutung zu beweisen, müssten wir also noch die Korrektheit der Ungleichung

$$\ln \left[e^{\alpha x_g t_f} \frac{x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1 \right)}{x_g - x^s} \right] (ax^s + bu^s - cx^s u^s) \leq ax_g \ln \left[1 + \frac{x^s}{x_g} \left(e^{\alpha x_g t_f} \frac{x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1 \right)}{x_g - x^s} - 1 \right) \right].$$

zeigen. Auch dies ist keine leichte Aufgabe. Mit der Voraussetzung $x^s < x^f$ folgt zwar

$$0 < \frac{x^s \left(\frac{x_g}{x^f} - 1 \right)}{x_g - x^s} = \frac{\frac{x^s}{x^f} x_g - x^s}{x_g - x^s} < \frac{x_g - x^s}{x_g - x^s} = 1,$$

womit wir den Bruch auf beiden Seiten der Ungleichung etwas charakterisieren können, dennoch brechen wir unsere Untersuchungen im Rahmen dieser Bachelorarbeit hier ab.

4 Abschließende Bemerkungen

In den Kapiteln 2 und 3 haben wir bereits zwei verschiedene Versionen unseres OCPs ausgiebig auf mögliche Lösungen untersucht. An dieser Stelle wollen wir eine dritte Form vorstellen und die so genannte Turnpike-Eigenschaft nachweisen. Im Anschluss fassen wir unsere Ergebnisse aus den vorigen Kapiteln in Form von Vor- und Nachteilen der beiden vorgestellten Lösungsansätze und des zugrundeliegenden Modells zusammen.

4.1 Ausblick: Die Turnpike-Eigenschaft

Bisher haben wir das OCP (2.8) respektive (3.1) immer auf einem endlichen Zeitraum $[0, t_f]$ betrachtet. Nun wollen wir untersuchen, was passiert, wenn ein Pachtvertrag mit unbegrenzter Laufzeit vorliegt und der Endzeitpunkt t_f somit gegen unendlich strebt. Auch hier wollen wir wieder davon ausgehen, dass wir eine hinreichend große Steuerbeschränkung M gegeben haben. Wir werden sehen, dass unser OCP dann einen sogenannten *Turnpike* hat. Der Begriff Turnpike kommt aus dem Englischen und heißt soviel wie Mautstraße. Spezielle OCPs mit unendlichem Zeithorizont haben Lösungen, bei denen die optimale Trajektorie von einem gewissen Wert nur für begrenzte Zeit um eine vorgegebene Toleranz abweicht. Dieser Zustand wird als Turnpike bezeichnet. Im Folgenden führen wir zunächst noch einige Bezeichnungen ein, die uns die Definition der Turnpike-Eigenschaft erleichtern sollen. Wir orientieren uns dabei an den Ausführungen einiger Schweizer Kollegen [FKJB14].

Definition 4.1 (stabiler Zustand). Gegeben sei ein OCP wie in Definition 2.2. Dann sei $\mathcal{X}^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ die *Menge der möglichen Anfangszustände*. Weiterhin nennen wir

$$\bar{\mathcal{X}} := \{ \bar{x} \in \mathcal{X} \mid \exists \bar{u} \in \mathcal{U} : f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \}$$

die *Menge der möglichen stabilen Zustände* und $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$ einen *möglichen stabilen Zustand*. \diamond

Definition 4.2 (Turnpike-Eigenschaft). Gegeben sei ein OCP wie in Definition 2.2. Dann sagen wir, das Lösungspaar (x^*, u^*) hat einen *approximativen Turnpike bei $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$* , falls es eine Abbildung $\nu : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ gibt, sodass für alle möglichen Startwerte $x^0 \in \mathcal{X}^0$ und jeden festen Endzeitpunkt $t_f > 0$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lambda(\Theta_{\varepsilon, t_f}) < \nu(\varepsilon),$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} und

$$\Theta_{\varepsilon, t_f} := \{ t \in [0, t_f] \mid \|x^*(t; x^0, u^*) - \bar{x}\| > \varepsilon \}$$

bezeichne. \diamond

Die Untersuchung auf Turnpikes steht in enger Verbindung mit der Untersuchung von OCPs mit unendlichem Zeithorizont. Faulwasser, Korda, Jones und Bonvin haben in ihrer Arbeit (vgl. [FKJB14]) beispielsweise gezeigt, dass die Turnpike-Eigenschaft hinreichend für Optimalität ist, falls die Kostenfunktion nicht von der Steuerung abhängt. Wir wollen nun zeigen, dass das OCP (3.1) für $b \neq 0$ einen Turnpike hat.

Satz 4.3. *Wir betrachten das OCP (3.1) für $b \neq 0$ mit Anfangswert x^0 , Endzustand x^f und dem Lösungspaar (x^*, u^*) . Ist x^s aus (3.8) größer als null, so ist $\bar{x} = x^s$ Turnpike von (x^*, u^*) .*

Beweis. Seien

$$t_1 := \min \{ t \geq 0 \mid \exists u : [0, t] \rightarrow [0, M] \text{ messbar} : x(t; 0, x^0, u) = x^s \}$$

und

$$t_2 := \max \{ t \geq 0 \mid \exists u : [t, t_f] \rightarrow [0, M] \text{ messbar} : x(t_f; t, x^s, u) = x^f \}$$

wie im Beweis zu Satz 3.13 gegeben. Aus den vorigen Abschnitten wissen wir, dass

$$\lambda(\Theta_{\varepsilon, t_f}) \leq t_1 + (t_f - t_2)$$

für alle $t_f > 0$ und $\varepsilon > 0$ gelten muss. Also können wir $\nu : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ einfach konstant als $\nu(\varepsilon) = t_1 + (t_f - t_2) + 1$ für alle $\varepsilon > 0$ wählen, um die Behauptung zu zeigen. ■

Bei diesem OCP liegt nicht nur ein approximativer Turnpike vor. Da x^s tatsächlich angenommen wird und die Zeit, in der die optimale Trajektorie nicht diesen Zustand hält, beschränkt ist, sagt man auch, x^s ist ein *exakter Turnpike*.

4.2 Erkenntnisse

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass die Methode basierend auf Greens Integralsatz sehr gut geeignet ist, um OCPs mit vorgegebenem Endzustand zu lösen. Bei freiem Endzustand haben wir eine notwendige Bedingung für die Optimalität herleiten können. Eine hinreichende Bedingung konnten wir zwar nicht angeben, haben aber einige interessante Ansätze geschaffen, die bei weiterer Untersuchung zum Ziel führen könnten. Mithilfe des Maximumprinzips erhielten wir beim OCP mit freiem Endzustand dieselben Werte mit geringerem Rechenaufwand, allerdings konnten wir auch hier keine allgemeine Schaltzeitanalyse liefern. Für das OCP mit festem Endpunkt ist das PMP nicht geeignet, da man hier nicht die zusätzlichen Transversalitätsbedingungen zur Verfügung hat.

Bei komplexeren Zielfunktionen kann es bei der Lösung mit Greens Satz schwieriger werden, Gebiete zu finden, auf denen der Integrand I positiv respektive negativ ist. In unserem Beispiel traten an dieser Stelle keine Probleme auf, weil I streng monoton war. Beim Vidale Wolfe-Model ist I zum Beispiel quadratisch in x (vgl. [ST00]). In solchen Fällen ist das Maximumprinzip strukturell besser zur Lösung des OCPs geeignet, da die Struktur der Zielfunktion hier keine Probleme darstellt.

Natürlich müssen wir in Hinsicht auf eine Anwendung Abstriche beim Modell machen. Wie bei jedem Modell wurden auch hier vereinfachende Annahmen getroffen. Es wird unterstellt, dass man zu jedem Zeitpunkt die genaue Population kennt. Diese ist wiederum nicht ganzzahlig. Um dieses Problem zu beheben könnte man sich auf die Populationsdichte zurückziehen, indem man die Gleichungen aus (3.1) entsprechend skaliert (vgl. [CV73]). Des Weiteren werden die Kostenfaktoren a , b und c als konstant vorausgesetzt. In der Realität sind jedoch sowohl die Bewirtschaftungs- und Arbeitskosten als auch der tatsächliche Umsatz Schwankungen unterworfen.

Abschließend können wir festhalten: Wir konnten das OCP (3.1) mit festem Endpunkt mithilfe von Greens Satz eindeutig lösen. Für die Lösung des OCP (2.8) mit freiem Endzustand haben wir eine notwendige Bedingung angegeben und Grundlagen für weitere Forschung geschaffen. Der Satz von Green ist also bei der Untersuchung von Optimalsteuerungsproblemen (abhängig von der Struktur der OCPs) eine gute Alternative zum Maximumprinzip.

A Anmerkung zu 3.2.2

Wir wollen nun unsere Gedanken zu Sanders Vorgehen illustrieren und das Problem herausarbeiten, welches bei der Untersuchung von Sanders Arbeit aufgetreten ist.

Die Beziehung (3.21) können wir noch weiter umformen, indem wir die Beziehung $\alpha x_g - S = 0$ und den Satz von L'Hospital benutzen:

$$\begin{aligned} t_f - \tau &= \lim_{\alpha x_g - S \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha x_g - S} \ln \left[1 - \frac{(\alpha x_g - S)(cy - b)}{y((a - cS) + (cy - b)\alpha)} \right] \\ &= \lim_{\alpha x_g - S \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{(\alpha x_g - S)(cy - b)}{y((a - cS) + (cy - b)\alpha)}} \left[-\frac{cy - b}{y((a - cS) + (cy - b)\alpha)} \right] \\ &= \frac{cy - b}{y((a - cS) + (cy - b)\alpha)} \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, die zweite Ableitung von J zu berechnen. Dazu differenzieren wir die Gleichung (3.19) nach τ . Dabei verwenden wir wieder die Beziehung $\alpha x_g - S = 0$ und setzen der Überschaubarkeit halber $y = y(\tau)$. An der Stelle (*) verwenden wir sowohl die Ketten- als auch die Quotientenregel der Differentiation.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J}{d\tau^2}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left[cy(\tau) - b + \frac{(x^f - y(\tau))(a - cS)}{\alpha(x_g - y(\tau)) - S} \right] (S - \tilde{u}(\tau)) \\ &\stackrel{(*)}{=} (S - \tilde{u}(\tau)) \left[c(\alpha y(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)y) + \frac{-(a - cS)(\alpha(x_g - y) - S) + \alpha(x^f - y)(a - cS)}{(\alpha(x_g - y) - S)^2} (\alpha y(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)y) \right] \\ &\stackrel{\alpha x_g = S}{=} (S - \tilde{u}(\tau)) \left[c(\alpha y(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)y) + \frac{(a - cS)\alpha x^f}{\alpha^2 y^2} y(\alpha(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)) \right] \\ &\stackrel{x^f}{=} (S - \tilde{u}(\tau)) \left[c(\alpha y(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)y) + \left(\frac{(a - cS)y}{\alpha y} - \frac{(cy - b)(\alpha(x_g - y) - S)}{\alpha y} \right) (\alpha(x_g - y) - \tilde{u}(\tau)) \right] \\ &\stackrel{\alpha x_g = S}{=} (S - \tilde{u}(\tau)) \left[cy(S - \tilde{u}(\tau) - \alpha y) + \frac{a - cS}{\alpha} (S - \tilde{u}(\tau) - \alpha y) - (b - cy)(S - \tilde{u}(\tau) - \alpha y) \right] \\ &= (S - \tilde{u}(\tau)) \left[cy(S - \tilde{u}(\tau)) - \alpha cy^2 + \frac{a - cS}{\alpha} (S - \tilde{u}(\tau)) - (a - cS)y - (b - cy)(S - \tilde{u}(\tau)) + \alpha by - \alpha cy^2 \right] \\ &= (S - \tilde{u}(\tau)) \left[cSy - ay + \alpha by - 2\alpha cy^2 + (S - \tilde{u}(\tau)) \underbrace{\left(cy + \frac{a - cS}{\alpha} - (b - cy) \right)}_{(1)} \right] \end{aligned}$$

Indem wir zum Vergleich in Sanders Ergebnis die Definition von x^s einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J}{d\tau^2}(\tau) &= (S - \tilde{u}(\tau)) \left[2\alpha cy(x^s - y) + c(S - \tilde{u}(\tau))(b - cy) \left(1 - \frac{\alpha(b - cy)}{a - cS} \right) \right] \\ &= (S - \tilde{u}(\tau)) \left[y(\alpha cx_g + b\alpha - a) - 2\alpha cy^2 + (S - \tilde{u}(\tau)) \underbrace{c(b - cy) \left(1 - \frac{\alpha(b - cy)}{a - cS} \right)}_{(2)} \right]. \end{aligned}$$

An dieser Stelle sehen wir, dass die beiden Ausdrücke (1) und (2) nicht übereinstimmen. Da Sanders Schritte nicht ausführlich dokumentiert wurden, können wir den Fehler nicht ermitteln.

Literaturverzeichnis

- [Apo69] T. M. Apostol. *Calculus Volume II*. John Wiley & Sons, 1969. Zitiert auf Seite 19.
- [Aul12] B. Aulbach. *Analysis I und Analysis II verständlich, anschaulich, kompakt*. Pro BUSINESS Verlag, 2012. Zitiert auf Seite 20.
- [CV73] E. M. Cliff and T. L. Vincent. An optimal policy for a fish harvest. *Journal Of Optimization Theory And Applications*, Vol. 12, S. 485-496, 1973. Zitiert auf den Seiten 2, 14, 16, and 42.
- [Dom99] P. Dombrowski. *Wege in euklidischen Ebenen - Kinematik der Speziellen Relativitätstheorie*. Springer-Verlag, 1999. Zitiert auf Seite 19.
- [FKJB14] T. Faulwasser, M. Korda, C. N. Jones, and D. Bonvin. Turnpike and dissipativity properties in dynamic real-time optimization and economic mpc. 2014. Zitiert auf den Seiten 40 and 41.
- [Goh70] B. S. Goh. Optimal control of a fish resource. *Malayan Scientist*, Vol. 5, S.65-70, 1969/70. Zitiert auf Seite 2.
- [Grü15] L. Grüne. *Numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2015. Zitiert auf den Seiten 3 and 37.
- [Heu80] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis 1*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1980. Zitiert auf Seite 28.
- [Heu91] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1991. Zitiert auf Seite 2.
- [Heu98] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis 2*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998. Zitiert auf Seite 27.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002. Zitiert auf Seite 3.
- [Leo01] G. A. Leonov. *Mathematical Problems of Control Theory - An Introduction*. World Scientific, 2001. Zitiert auf Seite 1.
- [LM67] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. Wiley, 1967. Zitiert auf Seite 10.
- [Loc01] A. Locatelli. *Optimal Control - An Introduction*. Birkhäuser Verlag, 2001. Zitiert auf Seite 1.
- [MS82] J. Macki and A. Strauss. *Introduction to Optimal Control Theory*. Springer-Verlag, 1982. Zitiert auf den Seiten 1, 8, and 10.

-
- [PBGM64] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Misčenko. *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964. Zitiert auf Seite 8.
- [San78] J. Sanders. A note on optimal fish harvest. *Journal Of Optimization Theory And Applications*, Vol. 24, S. 361-369, 24(2):361–369, Februar 1978. Zitiert auf Seite 18.
- [ST00] S. P. Sethi and G. L. Thompson. *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*. Springer-Verlag, 2000. Zitiert auf den Seiten 18 and 41.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Hyperfläche S und Tangentialebene T	10
2.2	Zustand z in der Zeitumkehr	16
3.1	Gebiet G als Inneres der Kurven Γ_u und $-\Gamma_v$	21
3.2	optimale Trajektorie für $x^0, x^f \leq x^s$	24
3.3	optimale Trajektorie für $x^0 \leq x^s \leq x^f$	24
3.4	optimale Trajektorie für $x^f \leq x^s \leq x^0$	25
3.5	optimale Trajektorie für $x^s \leq x^0, x^f$	25
3.6	Vergleich optimale und beliebige Trajektorie	26
3.7	optimale Trajektorie für $x^0, x^f < x^s$	26
3.8	optimale Trajektorie für $x^s < x^0, x^f$	27
3.9	Kostenfunktionen f_0^1 und f_0^2	30
3.10	Vergleich von Γ_s und Γ_f	36