Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Fachgebiet gewöhnliche Differentialgleichungen

Zur Selbstadjungiertheit regulärer Sturm-Liouville-Differentialoperatoren

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science

vorgelegt von

Philipp Schmitz

betreut durch

Prof. Dr. Carsten Trunk

Ilmenau, 26. Juni 2012

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Anfertigung meiner Bachelorarbeit unterstützt haben.
Im Besonderen danke ich meinem Betreuer Prof. Dr. Carsten Trunk, der mich letztendlich dem Thema dieser Arbeit nahe gebracht hat und mir während des Entstehungsprozesses mit vielen hilfreichen Ratschlägen zur Seite stand.
Der Dank gebührt auch meinen Eltern. Sie haben mir das Mathematikstudium erst ermöglicht und gaben mir, insbesondere in den letzten Jahren, jederzeit Rückhalt und Unterstützung.

Erklärung

„Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle von mir aus anderen Veröffentlichungen übernommenen Passagen sind als solche gekennzeichnet.“

Ilmenau, 26. Juni 2012 . . . .

Philipp Schmitz

Zusammenfassung

In vielen Bereichen der mathematischen Physik treten Sturm-Liouville-Differentialausdrücke im Zusammenhang mit Eigenwertproblemen auf. In dieser Arbeit werden daher, neben der Lösungstheorie solcher Differentialgleichungen, selbstadjungierte Realisierungen von Sturm-Liouville-Differentialausdrücken in geeigneten Hilberträumen sowie die Spektraleigenschaften dieser Realisierungen untersucht. Dabei beschränken sich die Betrachtungen im Wesentlichen auf den regulären Fall. Am Ende dieser Arbeit findet sich eine vollständige Beschreibung aller selbstadjungierten Realisierungen regulärer Sturm-Liouville-Differentialausdrücke.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir sogenannte Sturm-Liouville-Differentialausdrücke

$$\tau f := \frac{1}{r}\big(- (pf')' + qf\big) \tag{0.1}$$

mit reellwertigen lokal integrierbaren Funktionen $\frac{1}{p}, q$ und r über einem offenen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Dabei sind $p \neq 0$ und $r > 0$ fast überall in (a, b). Ausgehend von den Arbeiten der französischen Mathematiker *Charles-François Sturm* und *Joseph Liouville* (siehe [3], [4]) sind Differentialausdrücke der Form (0.1) bis zum heutigen Tag Gegenstand der Forschung. Wir verweisen dazu auf die aktuellen Bücher [1] und [11].

Durch die Arbeiten von *Hermann Weyl* (siehe [10]) und der Entwicklung der Quantenmechanik um 1925 erlangten Sturm-Liouville-Differentialausdrücke im Zusammenhang mit Differentialgleichungen der Form

$$\tau f = \lambda f, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{0.2}$$

große Bedeutung in der mathematischen Physik. So betrachtet man beispielsweise im dreidimensionalen Raum für ein geladenes Teilchen in einem elektrischen Feld mit kugelsymmetrischem Potential V (zum Beispiel das Elektron eines Wasserstoffatoms) die stationäre Schrödingergleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}\right) + V\Psi = E\Psi.$$

Dabei ist $\hbar \in \mathbb{R}$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum, $m \in \mathbb{R}$ die Masse des Teilchens und $E \in \mathbb{R}$ das Energieniveau des Systems. Durch Transformation in Kugelkoordinaten und anschließende Separation der Radial- und Winkelanteile erhält man für den Radialanteil $R = R(r)$ folgende Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\hbar^2 r^2}{2m}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left(r^2 V + \frac{\hbar^2}{2m} l(l+1)\right) R\right) = ER \quad \text{für } r \in (0, \infty),\ l \in \mathbb{Z},$$

mithin ein Differentialgleichung der Gestalt (0.2).

Das Problem der Form (0.2) wird klassischerweise als Eigenwertproblem interpretiert und mittels eines selbstadjungierten Operators in einem geeigneten Hilbertraum realisiert. Kapitel 1 stellt dafür die grundlegenden Begriffe bereit. Außerdem gibt dieses Kapitel einen Überblick über die Lösungstheorie linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen. Im Folgenden definieren wir in Kapitel 2 zwei Realisierungen von τ, den sogenannten maximalen und den präminimalen Operator. Dabei stellt der präminimale Operator eine symmetrische Einschränkung des maximalen Operators dar. Ausgehend von diesen Operatoren erfolgt die Konstruktion der selbstadjungierten Realisierungen von τ als Fortsetzungen des präminimalen Operators beziehungsweise Einschränkungen des maximalen Operators (vergleiche [7], Kapitel 10).

Bei der Konstruktion dieser selbstadjungierten Realisierungen stellt sich heraus, dass die Selbstadjungiertheit sehr eng mit dem Verhalten der Funktionen des Definitionsbereiches der Realisierungen an den Intervallrändern a und b zusammenhängt. Dabei unterscheidet man zwischen dem regulären und dem singulären Fall. Beim regulären Fall ist das Intervall (a, b) beschränkt und die Funktionen $\frac{1}{p}, q, r$ sind über $[a, b]$ integrierbar. Der singuläre Fall tritt hingegen ein, wenn eine dieser Bedingungen verletzt ist. In dieser Arbeit beschränken wir uns dabei im wesentlichen auf selbstadjungierte Realisierungen von τ im regulären Fall.

Die vorliegende Darstellung orientiert sich an der Darstellung in [8]. Allerdings sind dort an vielen Stellen statt vollständiger Beweise nur knappe Beweisskizzen angeführt. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist, diese Stellen ausführlicher zu behandeln und gelegentlich auftretende Fehler in [8] zu beseitigen. So wird im Beweis von [8, Satz 13.2 a)] nicht klar, wie sich die gewählte Intervalllänge bei erneuter Anwendung eines vorhergehenden Schrittes verhält. Dies wird in der vorliegenden Arbeit durch Lemma 1.5 klar gestellt, welches im Beweis von Satz 1.8 benutzt wird. Für die Aussagen über die Dimension des Lösungsraumes und die Gestalt von Lösungen in Anschluss an [8, Korollar 13.3] finden sich in [8] keine vollständigen Beweise. Diese Aussagen sind von grundlegender Bedeutung für die Sätze 13.5, 13.7, 13.10, 13.12 und 13.14 in [8]. Wir geben daher in Abschnitt 1.2 entsprechende Beweise an. Zudem geben wir in Anschluss an Satz 2.22 einen Beweis für die Dichtheit des präminimalen Operators im allgemeinen Fall (regulär und singulär) an (vergleiche [8, Satz 13.1]). Für den Beweis der Aussage von Satz 2.24, über den adjungierten Operator des präminimalen Operators im allgemeinen Fall, benutzen wir die Idee aus [6, Theorem 3.7]. Diese stützt sich auf im Vorfeld schon bewiesene Aussagen für den regulären Fall und unterscheidet sich wesentlich von der Darstellung in

[8, Satz 13.8]. Im Weiteren wird die in [8] häufig benutze Aussage (zum Beispiel in den Beweisen von Satz 13.8 und Satz 13.14), dass im regulären Fall Funktionen aus dem Definitionsbereich des maximalen Operators auch an den Intervallrandpunkten a und b definiert sind, an keiner Stelle in [8] explizit erwähnt oder bewiesen. Daher findet sich in dieser Arbeit anschließend an Lemma 2.16 ein Beweis dieser Aussage. Abschließend betrachten wir für selbstadjungierte Realisierungen im regulären Fall die Darstellung der Resolvente aus [8, Satz 13.14]. Im Beweis von [8] sind die Eigenschaften der Resolvente nur schwer nachvollziehbar. Aus diesem Grund führen wir unter Satz 2.29 einen übersichtlicheren Beweis für die Gestalt der Resolvente.

Am Ende von Kapitel 2 geben wir für den regulären Fall eine vollständige Beschreibung aller selbstadjungierten Realisierung des Sturm-Liouville-Differentialausdrucks τ sowie Eigenschaften der Spektren selbstadjungierter Sturm-Liouville-Operatoren an. Die sich natürlicherweise anschließende Behandlung selbstadjungierter Sturm-Liouville-Operatoren im singulären Fall ist nicht mehr Gegenstand dieser Arbeit und findet sich beispielsweise in [8, Abschnitt 13.3].

1 Grundlagen

1.1 Absolut stetige Funktionen

In diesem Abschnitt wiederholen wir bekannte Begriffe der Maß- und Integrationstheorie und betrachten Eigenschaften absolut stetiger Funktionen. Es sei $d \in \mathbb{N}$. Fortan bezeichnet λ das d-dimensionale Lebesgue-Maß und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *messbar*, wenn sie *Lebesgue-Borel-messbar* ist, das heißt das Urbild $f(A)^{-1} := \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A \}$ einer Borelmenge $A \subset \mathbb{C}$ ist Lebesgue-messbar.

Definition 1.1 a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Eine Eigenschaft gilt *fast überall* (in Ω), falls eine *Lebesgue-Nullmenge* $N \subset \Omega$, das heißt N ist Lebesgue-messbar und $\lambda(N) = 0$, existiert, sodass diese Eigenschaft für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist.

b) Eine messbare Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *p-integrierbar* für $0 < p < \infty$, wenn

$$\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < \infty$$

gilt. Für $p = 1$ werden wir die p-integrierbaren Funktionen kurz *integrierbar* nennen. Wie üblich bezeichnet für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ die Menge

$$[f] := \{ g : \Omega \to \mathbb{C} \mid g \text{ ist messbar und } f = g \text{ fast überall} \}$$

die Äquivalenzklasse aller messbaren Funktionen auf Ω, die sich nur auf Mengen vom Maße Null unterscheiden. Dabei wird $[f]$ stets mit einem Repräsentanten $g \in [f]$ identifiziert. Wir definieren

$$L^p(\Omega) := \{ [f] \mid f \text{ ist } p\text{-integrierbar} \}$$

als den Raum aller Äquivalenzklassen $[f]$, sodass die Funktion f p-integrierbar ist.

Bekanntermaßen ist der Raum $L^p(\Omega)$ zusammen mit der auf ihm erklärten Norm

$$\|\cdot\|_{L^p} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein Banachraum und im Fall $p = 2$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_{L^2} := \int_\Omega \overline{f} g \,\mathrm{d}\lambda.$$

c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Eine messbare Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *lokal integrierbar* in Ω, wenn f über jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ integrierbar ist, also $f\big|_K \in L^1(K)$ gilt. Den Raum der lokal integrierbaren Funktionen über Ω bezeichnen wir mit

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{ [f] \mid f \text{ ist lokal integrierbar} \}.$$

Für Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $a := \inf I$ und $b := \sup I$ definieren wir $L^p(a, b) := L^p(I)$. Analog schreiben wir $L^1_{\text{loc}}(a, b)$ statt $L^1_{\text{loc}}((a, b))$.

Definition 1.2 Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *absolut stetig*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle Zwischenstellen $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ die Bedingung

$$\sum_{i=1}^k |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ für ein Intervall $I \subset R$ heißt *absolut stetig*, falls für alle abgeschlossenen Intervalle $K \subset I$ die Einschränkung $f\big|_K$ eine absolut stetige Funktion ist. Die Menge aller absolut stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{AC}(I)$.

Die Resultate des nachfolgenden Satzes über absolut stetige Funktionen zitieren wir aus [2, Kapitel VII, §4].

Satz 1.3 *a) Eine absolut stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist stetig und fast überall differenzierbar.*

b) Gilt $f' = 0$ fast überall für eine absolut stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, so ist f konstant.

c) *Es sei* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *eine über* $[a,b]$ *integrierbare Funktion. Dann ist die Funktion* $G : [a,b] \to \mathbb{C}$ *mit*

$$G(x) := \int_a^x g \,\mathrm{d}\lambda \quad \textit{für } x \in [a,b]$$

absolut stetig und es gilt, $G' = g$ *fast überall.*

d) *Ist* $G : [a,b] \to \mathbb{C}$ *absolut stetig und setzt man* $G'(x) := 0$ *für alle* $x \in [a,b]$ *in denen* G *nicht differenzierbar ist, so ist* G' *integrierbar über* $[a,b]$ *und es gilt*

$$G(x) - G(a) = \int_a^x G' \,\mathrm{d}\lambda \quad \textit{für } x \in [a,b].$$

Folgerung 1.4 *Es seien* $f, g \in \mathcal{AC}([a,b])$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Beweis. Aufgrund der absoluten Stetigkeit der Funktionen f und g ist auch fg absolut stetig. Somit gilt $(fg)' = f'g + fg'$ fast überall. Satz 1.3 liefert

$$\int_a^b f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{1.1}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f und g, sowie der Integrierbarkeit von f' und g' nach Satz 1.3 gelten die Abschätzungen

$$\int_a^b |fg'|\,\mathrm{d}\lambda \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g'|\,\mathrm{d}\lambda < \infty \quad \text{und}$$
$$\int_a^b |f'g|\,\mathrm{d}\lambda \le \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \int_a^b |f'|\,\mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Dadurch sind fg' und $f'g$ integrierbar und (1.1) lässt sich schreiben als

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$ □

Das folgende Lemma dient als technische Grundlage für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen im nächsten Abschnitt.

Lemma 1.5 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative integrierbare Funktion. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$, sodass für alle $x \in [a,b]$*

$$\int_{[a,b]\cap(x-\eta,x+\eta)} f \,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten für ein festes $x_0 \in [a,b]$ die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^{x} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Nach Satz 1.3 ist die Funktion F absolut stetig, also insbesondere stetig auf $[a,b]$. Wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, ist F *gleichmäßig stetig*, das heißt es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

Wir wählen $\eta < \frac{\delta}{2}$. Für $x \in [a,b]$ definieren wir $\bar{a} := \max\{x-\eta, a\}$ und $\bar{b} := \min\{x+\eta, b\}$. Dann gilt wegen $\bar{b} - \bar{a} < \delta$

$$\int_{[a,b]\cap(x-\eta,x+\eta)} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f \,\mathrm{d}\lambda = F(\bar{b}) - F(\bar{a}) < \varepsilon. \qquad \square$$

1.2 Lineare Differentialgleichungen

Es sei im Folgenden immer $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und $a < b$. Wir betrachten in $\mathbb{C}^d$ für $d \in \mathbb{N}$ die lineare Differentialgleichung

$$y' = Ay + h \tag{1.2}$$

mit den messbaren Funktionen $A : (a,b) \to \mathbb{C}^{d\times d}$ und $h : (a,b) \to \mathbb{C}^d$, für die $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{d\times d}}$ und $\|h(\cdot)\|_{\mathbb{C}^d}$ lokal integrierbar in (a,b) sind.

Definition 1.6 Für ein nichtleeres Intervall $I \subset (a,b)$ nennen wir eine Funktion $y : I \to \mathbb{C}^d$ *lokale Lösung* der Differentialgleichung (1.2), wenn jede Komponente von y absolut stetig ist und y die Gleichung (1.2) fast überall in I erfüllt.

Gilt $I = (a,b)$ so heißt y *(globale) Lösung*.

Lemma 1.7 *Es sei $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $y : [\alpha, \beta] \to C^d$ ist genau dann eine lokale Lösung der Differentialgleichung (1.2) auf $[\alpha, \beta]$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{C}^d$, $x_0 \in [\alpha, \beta]$, wenn y die Integralgleichung*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)y(t) + h(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

auf $[\alpha, \beta]$ erfüllt.

Beweis. Es sei y eine lokale Lösung von (1.2) auf $[\alpha, \beta]$ mit $y(x_0) = y_0$. Dann gilt nach Satz 1.3 d)

$$\int_{x_0}^{x} A(t)y(t) + h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \quad \text{für } x \in [\alpha, \beta].$$

Andererseits stellt eine Funktion y, welche die Integralgleichung (1.3) erfüllt, als Folgerung aus Satz 1.3 c) eine in jeder Komponente absolut stetige Funktion dar. Offensichtlich erfüllt y die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Durch Differentiation von y erhält man

$$y'(x) = A(x)y(x) + h(x), \quad \text{fast überall auf } [\alpha, \beta].$$

Somit ist die Funktion y eine lokale Lösung auf $[\alpha, \beta]$. □

Die nachfolgende Aussage ist im Wesentlichen auch in [8, Kapitel 13, Satz 13.2] enthalten. Da dieser Satz, sowie Folgerungen aus dem Beweis selbst, von grundlegender Bedeutung für die weiteren Betrachtungen sind, geben wir hier einen Beweis an.

Satz 1.8 *Es sei $I \subset (a, b)$ ein nichtleeres Intervall. Für jedes $x_0 \in I \subset (a, b)$ und jedes $y_0 \in \mathbb{C}^d$ existiert genau eine lokale Lösung y der Differentialgleichung (1.2) in I mit $y(x_0) = y_0$. Insbesondere ist diese Lösung im Fall $I = (a, b)$ eine globale Lösung.*

Beweis. Es sei $[\alpha, \beta] \subset I \subset (a, b)$ mit $x_0 \in [\alpha, \beta]$ und $y_0 \in \mathbb{C}^d$. Wir zeigen zuerst die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung auf $[\alpha, \beta]$ mit Hilfe der Integralgleichung (1.3). Nach Voraussetzung ist $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{d\times d}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(a, b)$ und es existiert wegen Lemma 1.5 für ein positives $q < 1$ ein $\eta > 0$, sodass für alle $\xi \in [\alpha, \beta]$ gilt:

$$\int_{[\xi-\eta, \xi+\eta]\cap[\alpha,\beta]} \|A(t)\|_{\mathbb{C}^{d\times d}}\,\mathrm{d}t \le q. \tag{1.4}$$

Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{C}\left(K, \mathbb{C}^d\right)$ für ein abgeschlossenes Intervall $K \subset \mathbb{R}$ den Raum der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{C}^d$ mit der zugehörigen Norm

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}\left(K, \mathbb{C}^d\right) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Wir definieren für $\bar{\alpha} := \max\{\alpha, x_0 - \eta\}$ und $\bar{\beta} := \min\{\beta, x_0 + \eta\}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} B : \mathcal{C}\left([\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \mathbb{C}^d\right) &\to \mathcal{C}\left([\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \mathbb{C}^d\right) \quad \text{mit} \\ (Bu)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)u(t) + h(t) \,\mathrm{d}t & \quad \text{für } x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Wegen der lokalen Integrierbarkeit von $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{d \times d}}$ und $\|h(\cdot)\|_{\mathbb{C}^d}$ existiert das Integral in (1.5). Somit ist die Abbildung B wohldefiniert. Aus (1.4) folgt, dass B im Banachraum $\left(\mathcal{C}\left([\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \mathbb{C}^d\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ eine Kontraktion darstellt, denn es gilt für $u, v \in \mathcal{C}\left([\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \mathbb{C}^d\right)$

$$\begin{aligned} \|Bu - Bv\|_\infty &= \sup_{x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]} \|(Bu)(x) - (Bv)(x)\|_{\mathbb{C}^d} \\ &\leq \sup_{x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]} \int_{x_0}^{x} \|A(t)\|_{\mathbb{C}^{d \times d}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathbb{C}^d} \,\mathrm{d}t \\ &\leq \left(\sup_{x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]} \int_{x_0}^{x} \|A(t)\|_{\mathbb{C}^{d \times d}} \,\mathrm{d}t \right) \|u - v\|_\infty \leq q \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau eine Funktion $y \in \mathcal{C}\left([\bar{\alpha}, \bar{\beta}], \mathbb{C}^d\right)$, welche die Fixpunktgleichung $By = y$ erfüllt.

Mit der gleichen Argumentation finden sich nun eindeutig bestimmte Funktionen $\tilde{y} \in \mathcal{C}\left([x_0, x_0 + \eta] \cap [\alpha, \beta], \mathbb{C}^d\right)$ und $y^* \in \mathcal{C}\left([x_0, x_0 + 2\eta] \cap [\alpha, \beta], \mathbb{C}^d\right)$ mit den Anfangsbedingungen $\tilde{y}(x_0) = y_0$ und $y^*(\bar{\beta}) = y(\bar{\beta})$. Wegen der Eindeutigkeit stimmen y und $\tilde{y}$ sowie y^* und $\tilde{y}$ auf $[x_0, x_0 + \eta] \cap [\alpha, \beta]$ überein. Also ist y mit Hilfe von y^* eindeutig auf $[x_0 - \eta, x_0 + 2\eta] \cap [\alpha, \beta]$ stetig fortsetzbar, wobei y offensichtlich die Integralgleichung (1.3) auf $[x_0 - \eta, x_0 + 2\eta] \cap [\alpha, \beta]$ erfüllt. Analog lässt sich y wegen (1.4) auf ganz $[\alpha, \beta]$ eindeutig stetig fortsetzen, sodass y die Integralgleichung (1.3) auf $[a, b]$ erfüllt.

Es existiert also für jedes Intervall $[\alpha, \beta] \subset I$ mit $x_0 \in [\alpha, \beta]$ nach Lemma 1.7 eine lokale Lösung y der Differentialgleichung (1.2) auf $[\alpha, \beta]$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Diese Funktion lässt sich somit eindeutig stetig auf alle Punkte $x \in I$ fortsetzen. Daraus folgt die Existenz genau einer Lösung y in I mit $y(x_0) = y_0$. □

Bemerkung 1.9 Es sei $I \subset (a, b)$ ein nichtleeres Intervall mit $x_0 \in I$ und y die eindeutige globale Lösung der Differentialgleichung (1.2) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{C}^d$. Dann ist die lokale Lösung $\hat{y}$ in I mit $\hat{y}(x_0) = y_0$ eindeutig durch $y\big|_I$ bestimmt.

Bemerkung 1.10 Ist der linke Intervallrandpunkt $a > -\infty$ und sind $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{d\times d}}$ sowie $\|h(\cdot)\|_{\mathbb{C}^d}$ integrierbar über $[a,c]$ für ein[1] $c \in (a,b)$, so lässt sich eine Lösung y eindeutig stetig auf a fortsetzen. Man betrachte dafür analog zum vorhergehenden Beweis die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{B} : \mathcal{C}\left([a, a+2\eta] \cap [a,c], \mathbb{C}^d\right) &\to \mathcal{C}\left([a, a+2\eta] \cap [a,c], \mathbb{C}^d\right) \quad \text{mit} \\ (\tilde{B}u)(x) &:= y(a+\eta) + \int_{a+\eta}^{x} A(t)u(t) + h(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

wobei $\eta > 0$ mit Lemma 1.5 hinreichend klein gewählt ist, sodass (1.4) für alle $\xi \in [a,c]$ gilt und $\tilde{B}$ eine Kontraktion darstellt. Insbesondere existiert für $x_0 \in [a,b)$ und $y_0 \in \mathbb{C}$ genau eine Lösung y mit $y(x_0) = y_0$.

Wenn $b < \infty$ ist und $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{d\times d}}$, $\|h(\cdot)\|_{\mathbb{C}^d}$ integrierbar über $[c,b]$ für ein $c \in (a,b)$ sind, dann gilt entsprechend die stetige Fortsetzbarkeit der Lösungen auf b und die Existenz einer eindeutigen Lösung für $x_0 \in (a,b]$.

Satz 1.11 *Der Lösungsraum $\mathcal{L}_H$ der zu (1.2) gehörenden homogenen Differentialgleichung*

$$y' = Ay \tag{1.6}$$

ist ein d-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Beweis. Betrachten wir die kanonischen Einheitsvektoren $e_i = (0,\dots,0,1,0\dots,0)^T \in \mathbb{C}^d$, $i = 1,\dots,d$. Nach Satz 1.8 existieren für $x_0 \in (a,b)$ eindeutige Lösungen $\varphi_i \in \mathcal{L}_H$ mit $\varphi_i(x_0) = e_i$, $i = 1,\dots,d$. Da für eine nichttriviale Linearkombination $\varphi = \sum_{i=1}^d \lambda_i\varphi_i$, $\lambda_1,\dots,\lambda_d \in \mathbb{C}$, an der Stelle x_0

$$\varphi(x_0) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i \neq 0$$

gilt, ist φ ungleich der konstanten Nullfunktion. Somit sind $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ linear unabhängig, das heißt $\dim \mathcal{L}_H \geq d$.

[1] Existiert für eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ ein $c \in (a,b)$, sodass $f \in L^1(a,c)$ gilt, dann ist $f \in L^1(a,d)$ für alle $d \in (a,b)$, denn $:\int_a^d |f|\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_a^c |f|\,\mathrm{d}\lambda + \int_c^d |f|\,\mathrm{d}\lambda < \infty$.

Seien nun $\psi_1, \dots, \psi_{d+1} \in \mathcal{L}_H$. Dann gibt es für ein $x_0 \in (a,b)$ eine nichttriviale Linearkombination $\psi = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i \psi_i$, $\mu_1, \dots, \mu_{d+1} \in \mathbb{C}$, mit $\psi(x_0) = 0$, da die Vektoren $\psi_1(x_0), \dots, \psi_{d+1}(x_0)$ in $\mathbb{C}^d$ linear abhängig sind. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung für (1.6) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$ ist ψ die konstante Nullfunktion. Somit sind $\psi_1, \dots, \psi_{d+1}$ linear abhängig, das heißt $\dim \mathcal{L}_H \leq d$. □

Eine Basis des homogene Lösungsraums $\mathcal{L}_H$ wird *Fundamentalsystem* genannt. Der folgende Satz zeigt, dass es genügt zusätzlich zu einem Fundamentalsystem eine spezielle Lösung von (1.2) zu kennen um den gesamten Lösungsraum

$$\mathcal{L} := \left\{ y : (a,b) \to \mathbb{C}^d \;\middle|\; y \text{ ist Lösung von (1.2)} \right\}$$

beschreiben zu können.

Satz 1.12 *Es sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1.2). Für*

$$\Phi(\cdot) := (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_d(\cdot)) : (a,b) \to \mathbb{C}^{d \times d}$$

und $x_0 \in (a,b)$ stellt

$$\psi : (a,b) \to \mathbb{C}^d, \quad x \mapsto \psi(x) := \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} h(t) \, \mathrm{d}t \tag{1.7}$$

eine Lösung dar. Es gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \psi := \{ \varphi + \psi \mid \varphi \in \mathcal{L}_H \}$.

Beweis. Da $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ ein Fundamentalsystem darstellt, ist die Matrix $\Phi(x)$ für alle $x \in (a,b)$ invertierbar und es gilt $\Phi' = A\Phi$. Weiterhin ist die Abbildung

$$\Phi(\cdot)^{-1} : (a,b) \to \mathbb{C}^{d \times d}, \quad x \mapsto \Phi(x)^{-1}$$

wohldefiniert und aufgrund der Stetigkeit von $\Phi(\cdot)$ ebenfalls stetig in (a,b). Insbesondere ist $\|\Phi(\cdot)^{-1} h(\cdot)\|_{\mathbb{C}^d}$ lokal in (a,b) integrierbar. Da jeder Eintrag von Φ absolut stetig ist, sind zusammen mit Satz 1.3 c) alle Komponenten von ψ absolut stetige Funktionen.

Somit folgt

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \Phi'(x)\int_{x_0}^{x}\Phi(t)^{-1}h(t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x)\Phi(x)^{-1}h(x)\\ &= A(x)\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi(t)^{-1}h(t)\,\mathrm{d}t + h(x)\\ &= A(x)\psi(x) + h(x),\end{aligned}$$

das heißt $\psi \in \mathcal{L}$.

Es sei nun $y_0 \in \mathbb{C}^d$. Dann existiert eine Linearkombination von $\varphi = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \varphi_i \in \mathcal{L}_H$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Die Funktion $y = \varphi + \psi$ erfüllt die Differentialgleichung (1.2) und die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Wegen der Eindeutigkeit einer solchen Lösung gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \psi$. □

1.3 Lineare Operatoren in Hilberträumen

Es seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ komplexe Hilberträume mit ihren jeweiligen Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2}$. Wie in [7, Kapitel 1.2] sind Skalarprodukte dabei im ersten Argument semilinear und im zweiten linear. Eine lineare Abbildung $T : U \to \mathcal{H}_2$ mit dem Unterraum $U \subset \mathcal{H}_1$ nennen wir (linearen) Operator. Den Definitionsbereich von T bezeichnen wir dabei mit $\mathsf{dom}(T) := U$, den Bildbereich mit

$$\mathsf{ran}(T) := \{\, y \in \mathcal{H}_2 \mid y = Tx,\ x \in \mathsf{dom}(T)\,\}$$

und den Nullraum mit

$$\mathsf{ker}(T) := \{\, x \in \mathsf{dom}(T) \mid Tx = 0\,\}.$$

Für zwei Operatoren T und S bezeichnen in Analogie zu den Teilmengenbeziehungen mit $T \subset S$ beziehungsweise $T \supset S$ den Sachverhalt, dass beide Operatoren auf dem Schnitt $\mathsf{dom}(T) \cap \mathsf{dom}(S)$ übereinstimmen und $\mathsf{dom}(T) \subset \mathsf{dom}(S)$ beziehungsweise $\mathsf{dom}(T) \supset \mathsf{dom}(S)$ gilt. Der Operator T ist dann eine Einschränkung beziehungsweise ein Fortsetzung von S.

Definition 1.13 Es sei $T : \mathsf{dom}(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein Operator.

a) Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn der Graph von T

$$\Gamma(T) := \left\{ (x, Tx)^T \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \,\middle|\, x \in \mathsf{dom}(T) \right\}$$

im Hilbertraum $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ abgeschlossen ist.

b) Der Operator T heißt *abschließbar*, wenn ein Operator $\overline{T}$ existiert, dessen Graph der Abschluss des Graphen von T ist: $\Gamma\left(\overline{T}\right) = \overline{\Gamma(T)}$. Der Operator $\overline{T}$ wird *Abschluss* des Operators T genannt. Insbesondere ist dann $\overline{T}$ ein abgeschlossener Operator.

Bemerkung 1.14 Offensichtlich ist ein Operator T genau dann abschließbar, wenn eine abgeschlossene Fortsetzung S von T existiert. Somit gilt nämlich

$$\Gamma(T) \subset \overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S) = \overline{\Gamma(S)},$$

wobei der Operator S eingeschränkt auf die Menge

$$D := \left\{ x \in \mathcal{H}_1 \,\middle|\, (x, y)^T \in \overline{\Gamma(T)}, y \in \mathcal{H}_2 \right\}$$

der Abschluss von T ist.

Definition 1.15 a) Der Operator T heißt *dicht definiert*, falls der Definitionsbereich $\mathsf{dom}(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ ist.

b) Ist T ein dicht definierter Operator, so heißt der Operator $T^* : \mathsf{dom}(T^*) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ mit

$$\mathsf{dom}(T^*) := \left\{ y \in \mathcal{H}_2 \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Es existiert ein } z \in \mathcal{H}_1 \text{ mit} \\ \langle Tx, y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, z\rangle_{\mathcal{H}_1} \text{ für alle } x \in \mathsf{dom}(T) \end{array} \right\}$$

und

$$T^* y := z$$

der zu T *adjungierte* Operator. Aufgrund der Dichtheit von $\mathsf{dom}(T)$ in $\mathcal{H}_1$ existiert für $y \in \mathsf{dom}(T^*)$ genau ein z mit der obigen Eigenschaft.

Es sei nun $S : \mathsf{dom}(S) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator.

c) Der Operator S heißt *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in \mathsf{dom}(S)$ die Gleichung

$$\langle Sx, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, Sy\rangle_{\mathcal{H}}$$

erfüllt ist.

d) Gilt für den Operator S und dessen adjungierten Operator S^* die Gleichheit $S = S^*$, das heißt

$$\mathsf{dom}(S) = \mathsf{dom}(S^*) \quad \text{und} \quad Sx = S^*x \quad \text{für alle } x \in \mathsf{dom}(S),$$

so wird der Operator S *selbstadjungierter* Operator genannt.

Satz 1.16 *Es sei $T : \mathsf{dom}(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein dicht definierter Operator.*

a) Der adjungierte Operator T^* ist abgeschlossen.

b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathsf{ker}(T^* - \overline{z}) = \mathsf{ran}(T - z)^{\perp}$.

c) Ist T^* dicht definiert, so ist T abschließbar und es gilt $T^{**} = \overline{T}$.

d) Ist T abschließbar, so gilt $\overline{T}^* = T^*$.

Einen Beweis von Satz 1.16 findet man zum Beispiel in [7, Satz 2.40 und Satz 4.9].

Bemerkung 1.17 Eine direkte Folgerung aus diesem Satz und Bemerkung 1.14 ist die Abschließbarkeit symmetrischer Operatoren. Denn für einen symmetrischen Operator $S : \mathsf{dom}(S) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gilt wegen der Symmetrie $S \subset S^*$. Dabei ist S^* eine abgeschlossene Fortsetzung von S.

Definition 1.18 Es sei $T : \mathsf{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator.

a) Die Menge

$$\rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} (T-\lambda) : \mathsf{dom}(T) \to \mathcal{H} \text{ ist bijektiv und} \\ (T-\lambda)^{-1} \text{ ist ein linearer stetiger Operator} \end{array} \right\}$$

wird *Resolventenmenge* des Operators T genannt. Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt der Operator

$$R(T, \lambda) := (T - \lambda)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathsf{dom}(T)$$

Resolvente von T im Punkt λ.

b) Die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

bezeichnet man als *Spektrum* des Operators T.

Lemma 1.19 *Es sei $T : \mathsf{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator.*

a) Für $\lambda, \mu \in \rho(T)$ gilt

$$R(T,\lambda) - R(T,\mu) = (\lambda - \mu)R(T,\lambda)R(T,\mu) = (\lambda - \mu)R(T,\mu)R(T,\lambda).$$

Ist T ein selbstadjungierter Operator, dann ist

b) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und für $\lambda \in \rho(T)$ gilt

$$R(T,\lambda)^* = R(T,\overline{\lambda}).$$

Definition 1.20 Es sei $S : \mathsf{dom}(S) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein symmetrischer Operator. Die Zahlen

$$\gamma_+(S) := \dim \mathsf{ran}(S + \mathrm{i})^\perp = \dim \mathsf{ker}(S^* - \mathrm{i}),$$
$$\gamma_-(S) := \dim \mathsf{ran}(S - \mathrm{i})^\perp = \dim \mathsf{ker}(S^* + \mathrm{i})$$

heißen *obere* beziehungsweise *untere Defektzahl* von S.

Den Zusammenhang zwischen den Defektzahlen symmetrischer Operatoren und ihren selbstadjungierten Fortsetzungen stellt der nachfolgende Satz her. Diesen zitieren wir aus [7, Satz 10.10].

Satz 1.21 *Es sei $S : \mathsf{dom}(S) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit den Defektzahlen $\gamma_+(S) = \gamma_-(S) = m \in \mathbb{N}$. Eine symmetrische Fortsetzung A von S ist genau dann ein selbstadjungierter Operator, wenn $\mathsf{dom}(A)$ die direkte Summe aus $\mathsf{dom}(S)$ und einem m-dimensionalen Unterraum $D \subset \mathcal{H}$ ist: $\mathsf{dom}(A) = \mathsf{dom}(S) \dotplus D$.*

2 Reguläre selbstadjungierte Sturm-Liouville-Operatoren

2.1 Sturm-Liouville-Problem

Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Auf diesem Intervall betrachten wir den Differentialausdruck

$$(\tau f)(x) := \frac{1}{r}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) + qf\right) = \frac{1}{r}\big(-(pf')' + qf\big) \tag{2.1}$$

auch *Sturm-Liouville-Differentialausdruck* genannt. Dabei seien $p, q, r : (a,b) \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen mit den Eigenschaften:

(i) $\frac{1}{p}, q, r$ sind lokal integrierbar in (a,b),

(ii) $p \neq 0$ und $r > 0$ fast überall in (a,b).

Definition 2.1 Es sei $g : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion und $z \in \mathbb{C}$. Weiterhin sei der Differentialausdruck τ wie oben definiert. Für die Differentialgleichung

$$(\tau - z)f = g \tag{2.2}$$

nennen wir eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ *Lösung*, wenn f sowie pf' absolut stetige Funktionen sind und f die Gleichung (2.2) fast überall in (a,b) erfüllt.

Im Allgemeinen sind die Funktionen p und f' nicht fast überall differenzierbar. Durch die Forderung der absoluten Stetigkeit der Funktion pf' ist zumindest diese fast überall differenzierbar und τ kann auf f angewendet werden.

Satz 2.2 *Es sei $g : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit $rg \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Dann existiert für jedes $x_0 \in (a,b)$ und alle $\zeta_1, \zeta_2, z \in \mathbb{C}$ genau eine Lösung der Differentialgleichung (2.2) mit den Anfangsbedingungen $f(x_0) = \zeta_1$ und $(pf)'(x_0) = \zeta_2$.*

Beweis. Wir betrachten das Anfangswertproblem in $\mathbb{C}^2$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - zr & 0 \end{bmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -rg \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y(x_0) = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2. \tag{2.3}$$

Da die Funktionen $\frac{1}{p}, q, r$ und rg lokal integrierbar in (a,b) sind, besitzt das obige Problem die Form der Differentialgleichung aus (1.2). Nach Satz 1.8 existiert genau eine (globale) Lösung $y = (y_1, y_2)^T$ des Anfangswertproblems (2.3). Aufgrund der absoluten Stetigkeit der Komponenten von y sind $f := y_1$ und $pf' = y_2$ absolut stetig. Offensichtlich ist f also eine Lösung der Sturm-Liouville-Differentialgleichung (2.2) mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (2.3) ist auch f eindeutig bestimmt. □

Satz 2.3 *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann besitzt der Raum*

$$\mathcal{N}(\tau - z) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \textit{ ist eine Lösung von } (\tau - z)f = 0 \right\} \subset \mathcal{AC}((a,b))$$

die Dimension zwei.

Zwei Funktionen u und v aus $\mathcal{N}(\tau - z)$ sind genau dann linear unabhängig in $\mathcal{N}(\tau - z)$, wenn für die modifizierte Wronski-Determinante

$$W\{u,v\} := upv' - vpu' \neq 0$$

gilt.

Beweis. Wir betrachten die homogene Differentialgleichung

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - zr & 0 \end{bmatrix} y. \tag{2.4}$$

Nach Satz 1.11 ist der Lösungsraum $\mathcal{L}_H$ für die Differentialgleichung (2.4) ein zweidimensionaler Vektorraum. Identifiziert man nun für eine Lösung $y = (y_1, y_2)^T$ von (2.4) die Komponenten y_1 mit f und y_2 mit pf', so folgt $\dim \mathcal{N}(\tau - z) = 2$. Weiterhin sind zwei Lösungen $(u, pu')^T$ und $(v, pv')^T$ aus $\mathcal{L}_H$ genau dann linear unabhängig, wenn gilt:

$$0 \neq \det \begin{bmatrix} u & v \\ pu' & pv' \end{bmatrix} = upv' - vpu' = W\{u,v\}.$$

□

Bemerkung 2.4 Die modifizierte Wronski-Determinante $W\{u,v\}$ für die Funktionen $u,v \in \mathcal{N}(\tau - z)$ ist konstant in (a,b).

BEWEIS. Durch Differentiation erhält man

$$\begin{aligned}
W\{u,v\}' &= u'pv' + u(pv')' - v'pu' - v(pu')' = u(pv')' - v(pu')' \\
&= u(pv')' - v(pu')' + v(qu) - v(rzu) - v(qu) + v(rzu) \\
&= u(pv')' + vr\left(\frac{1}{r}\big(-(pu')' + qu\big) - zu\right) - v(qu) + v(rzu) \\
&= u(pv')' + vr\big((\tau - z)u\big) - v(qu) + v(rzu) \\
&= u(pv')' - u(qv) + u(rzv) \\
&= -ur\big((\tau - z)v\big) = 0
\end{aligned}$$

fast überall in (a,b). Nach Satz 1.3 b) ist die Funktion $W\{u,v\}$ konstant. □

Für zwei linear unabhängige Funktionen u und v aus $\mathcal{N}(\tau - z)$ bezeichnen wir die Menge $\{u,v\}$ in Anlehnung an die Lösungen des homogenen Systems (1.6) als ein *Fundamentalsystem* von $\mathcal{N}(\tau - z)$.

Satz 2.5 *Es seien $g : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit $rg \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ und $\{u,v\}$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{N}(\tau - z)$. Dann haben alle Lösungen der Gleichung (2.2) für $x \in (a,b)$ die Form*

$$f(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) + \frac{1}{W\{u,v\}}\left(u(x)\int_{x_0}^{x} v(t)g(t)r(t)\,\mathrm{d}t - v(x)\int_{x_0}^{x} u(t)g(t)r(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $x_0 \in (a,b)$.

BEWEIS. Wir betrachten wieder die lineare Differentialgleichung (1.2) in $\mathbb{C}^2$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - zr & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ -rg \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei

$$\Phi(\cdot) := \begin{bmatrix} u(\cdot) & v(\cdot) \\ (pu')(\cdot) & (pv')(\cdot) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi(\cdot)^{-1} = \frac{1}{W\{u,v\}}\begin{bmatrix} (pv')(\cdot) & -v(\cdot) \\ -(pu')(\cdot) & u(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Nach Satz 1.12 stellt für $x_0 \in (a,b)$

$$\psi : (a,b) \to \mathbb{C}^2, \quad x \mapsto \psi(x) := \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} h(t)\, \mathrm{d}t$$

eine Lösung der linearen Differentialgleichung (1.2) dar. Außerdem besitzt jede Lösung von (1.2) nach Satz 1.12 die Form $y = (y_1, y_2)^T = c_1(u, pu')^T + c_2(v, pv')^T + \psi$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, das heißt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} u(x) \\ (pu')(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v(x) \\ (pv')(x) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{W\{u,v\}} \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ (pu')(x) & (pv')(x) \end{bmatrix} \int_{x_0}^{x} \begin{bmatrix} (pv')(t) & -v(t) \\ -(pu')(t) & u(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -(rg)(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= c_1 \begin{pmatrix} u(x) \\ (pu')(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v(x) \\ (pv')(x) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{W\{u,v\}} \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ (pu')(x) & (pv')(x) \end{bmatrix} \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} v(t) \\ -u(t) \end{pmatrix} \cdot (rg)(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in (a,b).
\end{aligned}$$

Identifiziert man wieder f mit y_1 als Lösung der Sturm-Liouville-Differentialgleichung (2.2), so erhält man

$$f(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) + \frac{1}{W\{u,v\}} \left(u(x) \int_{x_0}^{x} v(t) g(t) r(t)\, \mathrm{d}t - v(x) \int_{x_0}^{x} u(t) g(t) r(t)\, \mathrm{d}t \right)$$

für alle $x \in (a,b)$. Aufgrund der Eindeutigkeit einer solchen Lösung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $f(x_0) = \zeta_1 \in \mathbb{C}$ und $(pf')(x_0) = \zeta_2 \in \mathbb{C}$ nach Satz 2.2 besitzt jede Lösung diese Form. □

Definition 2.6 Für zwei absolut stetige Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{C}$, für die pf' und pg' stetig sind, erklären wir die sogenannte *Lagrange-Klammer*

$$[f,g]_x := \overline{f(x)}(pg')(x) - \overline{(pf')(x)}g(x) \quad \text{für } x \in (a,b).$$

Des Weiteren definieren wir für $\alpha, \beta \in (a,b)$

$$[f,g]_\alpha^\beta := [f,g]_\beta - [f,g]_\alpha.$$

Satz 2.7 *Sind $f, g : (a,b) \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f, pf', g, pg' \in \mathcal{AC}((a,b))$, so existiert* *für* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ *das Integral*

$$\int_\alpha^\beta \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x)\right) r(x) \, \mathrm{d}x$$

und es gilt

$$\int_\alpha^\beta \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x)\right) r(x) \, \mathrm{d}x = [f, g]_\beta - [f, g]_\alpha = [f, g]_\alpha^\beta.$$

Beweis. Nach Folgerung 1.4 gilt

$$\overline{f(\beta)}(pg')(\beta) - \overline{f(\alpha)}(pg')(\alpha) = \int_\alpha^\beta \overline{f'(t)}(pg')(t) \, \mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta \overline{f(t)}(pg')'(t) \, \mathrm{d}t$$

sowie

$$\overline{(pf')(\beta)} g(\beta) - \overline{(pf')(\alpha)} g(\alpha) = \int_\alpha^\beta \overline{(pf')(t)} g'(t) \, \mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta \overline{(pf')'(t)} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
[f, g]_\beta - [f, g]_\alpha &= \overline{f(\beta)}(pg')(\beta) - \overline{(pf')(\beta)} g(\beta) - \overline{f(\alpha)}(pg')(\alpha) + \overline{(pf')(\alpha)} g(\alpha) \\
&= \int_\alpha^\beta \overline{f(t)}(pg')'(t) \, \mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \overline{(pf')'(t)} g(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\overline{f(t)}(pg')'(t) - \overline{(pf')'(t)} g(t) - q(t) g(t) \overline{f(t)} + q(t) \overline{f(t)} g(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\overline{(\tau f)(t)} g(t) - \overline{f(t)} (\tau g)(t)\right) r(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Definition 2.8 a) Ist $a > -\infty$ und sind die Funktionen $\frac{1}{p}, q$ und r (zusätzlich zu den allgemeinen Voraussetzungen an τ) für ein $c \in (a, b)$ über $[a, c]$ integrierbar, so heißt τ *regulär* bei a.

b) Analog heißt τ *regulär* bei b, wenn $b < \infty$ ist und $\frac{1}{p}, q$ und r für ein $c \in (a, b)$ über $[c, b]$ integrierbar sind.

c) Ist τ bei a und b regulär, so heißt τ regulär.

d) Falls τ bei a, bei b beziehungsweise bei a *oder* b nicht regulär ist, so heißt τ *singulär* bei a, *singulär* bei b beziehungsweise *singulär*.

Satz 2.9 *Es sei τ regulär bei a, $z \in \mathbb{C}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, sodass die Funktion rg für ein $c \in (a,b)$ integrierbar über $[a,c]$ ist.*

a) Für jede Lösung von $(\tau - z)f = g$ existieren die Grenzwerte

$$f(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{und} \quad (pf')(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (pf')(x).$$

b) Zu beliebigen $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ existiert genau eine Lösung f von $(\tau - z)f = g$ mit $f(a) = \zeta_1$ und $(pf')(a) = \zeta_2$.

Beweis. Man betrachte wieder die lineare Differentialgleichung in $\mathbb{C}^2$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - zr & 0 \end{bmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -rg \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

und identifiziert eine Lösungen y mit $(f, pf')^T$. Dann folgt mit Bemerkung 1.10 die stetige Fortsetzbarkeit von f und pf' auf den linken Randpunkt a. Insbesondere sind die Funktionen f und pf' also stetig auf $[a,c]$, weshalb die Grenzwerte aus a) existieren. Die Behauptung b) folgt ebenfalls aus Bemerkung 1.10. □

Analoge Aussagen gelten für den rechten Randpunkt b, wenn τ bei b regulär und die Funktion rg für ein $c \in (a,b)$ über $[c,b]$ integrierbar ist.

Folgerung 2.10 *Es sei τ regulär und $g : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Außerdem sei rg eine über $[a,b]$ integrierbare Funktion. Dann sind für eine Lösung f von $(\tau - z)f = g$ die Funktionen f und pf' stetig auf $[a,b]$.*

2.2 Sturm-Liouville-Operatoren

Mit Hilfe des Sturm-Liouville-Differentialausdrucks τ aus (2.1) definieren wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$L^2_r(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ ist messbar}, \; r|f|^2 \in L^1(a,b) \right\}.$$

Für zwei Funktionen f und g aus $L^2_r(a,b)$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\int_a^b |fgr| \, \mathrm{d}\lambda \leq \left(\int_a^b r|f|^2 \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b r|g|^2 \, \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Somit ist die folgende Sesquilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_r : L_r^2(a,b) \times L_r^2(a,b) \to \mathbb{C}, \quad (f,g) \mapsto \langle f, g \rangle_r := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) r(x) \, \mathrm{d}x$$

eine wohldefinierte Abbildung und stellt offenbar ein Skalarprodukt bezüglich des Funktionenraumes $L_r^2(a,b)$ dar. Des Weiteren bildet der Raum $L_r^2(a,b)$ zusammen mit der Abbildung

$$\| \cdot \|_r : L_r^2(a,b) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_r := \sqrt{\langle f, f \rangle_r}$$

einen normierten Vektorraum.

Lemma 2.11 *Der Raum $L_r^2(a,b)$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Zu zeigen ist nur noch die Vollständigkeit des Raumes $L_r^2(a,b)$ bezüglich der Norm $\| \cdot \|_r$. Es sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L_r^2(a,b)$. Wegen

$$\|g\|_r^2 = \int_a^b \overline{g(x)} g(x) r(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \left| r(x)^{\frac{1}{2}} g(x) \right|^2 \, \mathrm{d}x = \left\| r^{\frac{1}{2}} g \right\|_{L^2}^2 \quad \text{für } g \in L_r^2(a,b) \tag{2.6}$$

stellt $\left(r^{\frac{1}{2}} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^2(a,b)$ dar. Da $\left(L^2(a,b), \|\cdot\|_{L^2}\right)$ ein Banachraum ist, konvergiert die Folge $\left(r^{\frac{1}{2}} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ also gegen ein $h \in L^2(a,b)$. Aus (2.6) folgt wiederum die Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Funktion $f := r^{-\frac{1}{2}} h$ in der Norm $\|\cdot\|_r$. Weiterhin liegt f wegen $\int_a^b |h(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_a^b r(x) |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ in $L_r^2(a,b)$. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Mit Hilfe des Differentialausdrucks τ aus (2.1) definieren wir nun zwei Operatoren.

Definition 2.12 a) Es sei

$$\mathsf{dom}(T) := \left\{ f \in L_r^2(a,b) \;\middle|\; f, pf' \in \mathcal{AC}((a,b)) \text{ und } \tau f \in L_r^2(a,b) \right\}.$$

Der Operator

$$T : \mathsf{dom}(T) \to L_r^2(a,b), \quad f \mapsto Tf := \tau f$$

heißt *maximaler* Operator.

b) Den auf

$$\mathsf{dom}(T_0') := \{\, f \in \mathsf{dom}(T) \mid f \text{ hat kompakten Träger in } (a,b) \,\}$$

erklärte Operator

$$T_0' : \mathsf{dom}(T_0') \to L_r^2(a,b), \quad f \mapsto T_0' f := \tau f$$

bezeichnen wir als *präminimalen* Operator.

Lemma 2.13 *Für alle $f \in \mathsf{dom}(T_0')$ und $g \in \mathsf{dom}(T)$ gilt*

$$\langle T_0' f, g \rangle_r = \langle f, Tg \rangle_r .$$

Beweis. Es seien $f \in \mathsf{dom}(T_0')$ und $g \in \mathsf{dom}(T)$. Wir betrachten ein abgeschlossenes Intervall $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ mit $\operatorname{supp}(g) := \overline{\{\, x \in (a,b) \mid g(x) \neq 0 \,\}} \subset (\alpha,\beta)$. Dieses existiert wegen der Kompaktheit des Trägers von g. In hinreichend kleinen Umgebungen von α und β sowie innerhalb der Intervalle $(a,\alpha]$ und $[\beta,b)$ sind die Funktion g und somit auch pg' und $(pg')'$ gleich Null. Da f und pf', sowie g und pg' absolut stetig sind, gilt mit Satz 2.7

$$\begin{aligned}
\langle T_0' f, g \rangle_r - \langle f, Tg \rangle_r &= \int_a^b \overline{(\tau f)(x)} g(x) r(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f(x)} (\tau g)(x) r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x) \right) r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x) \right) r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [f,g]_\beta - [f,g]_\alpha = 0.
\end{aligned}$$ □

Bemerkung 2.14 Aus Lemma 2.13 folgt sofort die Beziehung

$$\langle T_0' f, g \rangle_r = \langle f, T_0' g \rangle_r \quad \text{für alle } f, g \in \mathsf{dom}(T_0').$$

Am Ende dieses Abschnitts zeigen wir außerdem, dass der Definitionsbereich des präminimalen Operators dicht in $L_r^2(a,b)$ liegt und somit T_0' ein symmetrischer Operator ist. Im Falle der Existenz einer selbstadjungierten Realisierung A des Differentialausdrucks τ muss demnach wegen der Symmetrie des präminimalen Operators die Beziehung $T_0' \subset A \subset (T_0')^*$ gelten.

Satz 2.15 *Für Funktionen $f, g \in \mathsf{dom}(T)$ existieren die Grenzwerte*

$$[f,g]_a := \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} [f,g]_x \quad \textit{und} \quad [f,g]_b := \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} [f,g]_x$$

und es gilt

$$\langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = [f,g]_b - [f,g]_a =: [f,g]_a^b.$$

Beweis. Es sei $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$ ein abgeschlossenes nichtleeres Intervall und $f, g \in \mathsf{dom}(T)$. Weiterhin seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a < \alpha_n \leq \beta$ und $\alpha \leq \beta_n < b$, für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = b.$$

Wir definieren

$$F_n := \chi_{[\alpha_n, \beta]} \left(\overline{\tau f} g - \overline{f} \tau g\right) r \quad \text{und} \quad G_n := \chi_{[\alpha, \beta_n]} \left(\overline{\tau f} g - \overline{f} \tau g\right) r$$

mit der charakteristischen Funktion χ. Da das Integral

$$\int_a^b \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x)\right) r(x)\,\mathrm{d}x = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r$$

existiert, besitzt die Funktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine integrierbare Majorante. Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz und Satz 2.7 liefern

$$\begin{aligned}\int_a^\beta \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x)\right) r(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} [f,g]_{\alpha_n}^\beta \\ &= [f,g]_\beta - \lim_{n\to\infty} [f,g]_{\alpha_n} = [f,g]_\beta - [f,g]_a.\end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite und der Ausdruck $[f,g]_\beta$ existieren. Somit existiert auch $[f,g]_a$. Mit der analogen Begründung für G_n existiert $[f,g]_b$. Weiterhin gilt für $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r &= \int_a^x \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x)\right) r(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_x^b \left(\overline{(\tau f)(x)} g(x) - \overline{f(x)} (\tau g)(x)\right) r(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [f,g]_x - [f,g]_a + [f,g]_b - [f,g]_x = [f,g]_a^b.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.16 *Es sei τ regulär und $z \in \mathbb{C}$.*

a) Für jede Funktion $g \in L^2_r(a,b)$ und alle $x_0 \in [a,b]$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ existiert genau eine Lösung $f \in \mathsf{dom}(T)$ der Gleichung $(\tau - z)f = g$ mit $f(x_0) = \zeta_1$ und $(pf')(x_0) = \zeta_2$.

b) Es gilt $\mathcal{N}(\tau - z) = \mathsf{ker}(T - z)$. Insbesondere besitzt $\mathsf{ker}(T - z)$ die Dimension zwei.

c) Für alle Funktionen $f \in \mathsf{dom}(T)$ existieren die Grenzwerte

$$f(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \textit{und} \quad (pf')(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (pf')(a).$$

Entsprechendes gilt für den rechten Randpunkt b. Insbesondere sind die Funktionen f und pf' stetig auf $[a,b]$.

Beweis. a) Es seien $g \in L^2_r(a,b)$, $x_0 \in [a,b]$ und $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Da r über $[a,b]$ integrierbar ist gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int_a^b |rg| \,\mathrm{d}\lambda \leq \left(\int_a^b r \,\mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b r|g|^2 \,\mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Die Funktion rg ist somit über $[a,b]$ integrierbar. Aus Satz 2.2 und Satz 2.9 folgt die Existenz der eindeutigen Lösung f von $(\tau - z)f = g$ mit $f(x_0) = \zeta_1$ und $(pf')(x_0) = \zeta_2$. Es bleibt $f \in \mathsf{dom}(T)$ zu zeigen. Da f eine Lösung ist, sind f und pf' absolut stetige Funktionen in (a,b) und nach Folgerung 2.10 stetig auf $[a,b]$. Wegen $(\tau - z)f = g \in L^2_r(a,b)$ gilt $\tau f \in L^2_r(a,b)$ genau dann, wenn $f \in L^2_r(a,b)$. Aus der Stetigkeit von f auf $[a,b]$ und der Integrierbarkeit von r über $[a,b]$ folgt $f \in L^2_r(a,b)$. Die Funktion f liegt somit in $\mathsf{dom}(T)$.

b) Offensichtlich gilt $\mathsf{ker}(T - z) \subset \mathcal{N}(\tau - z)$. Es bleibt also $\mathcal{N}(\tau - z) \subset \mathsf{ker}(T - z)$ zu zeigen. Insbesondere reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{N}(\tau - z)$ eine Teilmenge von $\mathsf{dom}(T)$ ist, was nach Teil a) erfüllt ist. Aus Satz 2.3 folgt $\dim \mathsf{ker}(T - z) = 2$.

c) Es sei $f \in \mathsf{dom}(T) \subset L^2_r(a,b)$. Nach Teil a) existiert für $\tau g = Tf$ eine Lösung $g \in \mathsf{dom}(T)$ mit $g(a) = (pg')(a) = 0$. Weiterhin sei $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem von $\mathsf{ker}(T) = \mathcal{N}(\tau)$. Es gilt $T(f - g) = 0$. Somit existieren Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, sodass $f - g = c_1 u + c_2 v$ gilt. Wegen der Darstellung

$$f = c_1 u + c_2 v + g$$

und Satz 2.9 existieren die Grenzwerte $f(a)$ und $(pf')(a)$. □

Bemerkung 2.17 Es seien τ regulär und die Funktionen $f, g \in \mathsf{dom}(T)$. Dann gilt wegen Satz 2.16 c)

$$[f, g]_a = \overline{f(a)}(pg')(a) - \overline{(pf')(a)}g(a) \quad \text{und} \quad [f, g]_b = \overline{f(b)}(pg')(b) - \overline{(pf')(b)}g(b).$$

Satz 2.18 *Es sei τ regulär. Dann gibt es für $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ eine Funktion $f \in \mathsf{dom}(T)$, sodass*

$$f(a) = c_1, \quad (pf')(a) = c_2, \quad f(b) = d_1 \quad \textit{und} \quad (pf')(b) = d_2 \tag{2.7}$$

gilt.

Beweis. Es seien Funktionen u und v aus dem Raum $\mathcal{N}(\tau) = \mathsf{ker}(T) \subset \mathsf{dom}(T)$ mit

$$u(b) = 0, \quad (pu')(b) = 1, \quad v(b) = 1, \quad (pv')(b) = 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von u, pu', v und pv' auf $[a, b]$ nach Folgerung 2.10, lässt sich auch $W\{u, v\}$ stetig auf die Intervallränder a und b fortsetzen. Mit der Bemerkung 2.4 gilt

$$W\{u, v\}(x) = W\{u, v\}(b) = u(b)(pv')(b) - v(b)(pu')(b) = -1 \neq 0$$

für alle $x \in (a, b)$. Also ist $\{u, v\}$ nach Satz 2.3 ein Fundamentalsystem von $\mathsf{ker}(T)$. Wir betrachten die Linearkombination $g = \alpha u + \beta v \in \mathsf{ker}(T) \subset \mathsf{dom}(T)$, wobei $(\alpha, \beta)^T \in \mathbb{C}^2$ die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \langle u, u\rangle_r & \langle u, v\rangle_r \\ \langle v, u\rangle_r & \langle v, v\rangle_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ -d_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

ist. Das Gleichungssystem (2.8) besitzt eine eindeutige Lösung. Denn zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der linearen Unabhängigkeit der Funktionen u und v gilt folgende Abschätzung:

$$\det \begin{bmatrix} \langle u, u\rangle_r & \langle u, v\rangle_r \\ \langle v, u\rangle_r & \langle v, v\rangle_r \end{bmatrix} = \|u\|_r^2 \|v\|_r^2 - |\langle u, v\rangle_r|^2 > 0.$$

Mit $g \in \mathsf{dom}(T) \subset L_r^2(a, b)$ existiert nach Lemma 2.16 eine eindeutige Lösung $w_1 \in \mathsf{dom}(T)$ von $\tau w_1 = g$ mit $w_1(a) = (pw_1')(a) = 0$. Aus $u, v \in \mathsf{ker}(T)$, Satz 2.15, Bemerkung 2.17 und $w_1(a) = (pw_1')(a) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha\langle u, u\rangle_r + \beta\langle u, v\rangle_r = \langle u, g\rangle_r = \langle u, \tau w_1\rangle_r = \langle u, Tw_1\rangle_r - \langle Tu, w_1\rangle_r \\ &= -[u, w_1]_a^b = [u, w_1]_a - [u, w_1]_b = -[u, w_1]_b = \overline{(pu')(b)} w_1(b) \\ &= w_1(b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_2 &= -\alpha\langle v, u\rangle_r - \beta\langle v, v\rangle_r = -\langle v, g\rangle_r = -\langle v, \tau w_1\rangle_r = \langle Tv, w_1\rangle_r - \langle v, Tw_1\rangle_r \\ &= [v, w_1]_a^b = [v, w_1]_a^b = [v, w_1]_b = \overline{v(b)}(pw_1')(b) \\ &= (pw_1')(b). \end{aligned}$$

Analog existiert eine Funktion $w_2 \in \mathsf{dom}(T)$ mit $w_2(a) = c_1$, $(pw_2')(a) = c_2$ und $w_2(b) = (pw_2')(b) = 0$. Dann erfüllt die Funktion $f := w_1 + w_2 \in \mathsf{dom}(T)$ die Bedingung (2.7). □

Der letzte Satz ermöglicht nun im Falle der Regularität von τ die Definition einer weiteren Realisierung des Differentialausdrucks τ.

Definition 2.19 Es sei τ regulär. Der auf

$$\mathsf{dom}(T_0) := \{\, f \in \mathsf{dom}(T) \mid f(a) = (pf')(a) = f(b) = (pf')(b) = 0 \,\}$$

erklärte Operator

$$T_0 : \mathsf{dom}(T_0) \to L_r^2(a, b), \quad f \mapsto T_0 f := \tau f$$

heißt *minimaler* Operator.

Bemerkung 2.20 Offenbar gilt $T_0' \subset T_0 \subset T$. Satz 2.15 liefert demnach analog zum präminimalen Operator für den minimalen Operator T_0 die Beziehungen

$$\langle T_0 f, g\rangle_r = \langle f, Tg\rangle_r \quad \text{für alle } f \in \mathsf{dom}(T_0),\ g \in \mathsf{dom}(T)$$

und

$$\langle T_0 f, g\rangle_r = \langle f, T_0 g\rangle_r \quad \text{für alle } f, g \in \mathsf{dom}(T_0).$$

Satz 2.21 *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt im regulären Fall* *a)* $\mathsf{ran}(T_0 - z) = \mathcal{N}(\tau - \overline{z})^\perp = \mathsf{ker}(T - \overline{z})^\perp$ *und*

b) $\mathsf{ran}(T_0 - z)^\perp = \mathcal{N}(\tau - \overline{z}) = \mathsf{ker}(T - \overline{z})$.

Beweis. Nach Lemma 2.16 gilt $\mathcal{N}(\tau - \overline{z}) = \mathsf{ker}(T - \overline{z})$.

a) Es sei $f \in \mathsf{dom}(T_0)$. Dann gilt für $g \in \mathsf{ker}(T - \overline{z})$ mit Bemerkung 2.20

$$0 = \langle f, (T - \overline{z})g\rangle_r = \langle f, Tg\rangle_r - \langle f, \overline{z}g\rangle_r = \langle T_0 f, g\rangle_r - \langle zf, g\rangle_r = \langle (T_0 - z)f, g\rangle_r,$$

das heißt $\mathsf{ran}(T_0 - z) \subset \mathsf{ker}(T - \overline{z})^\perp$.

Betrachten wir nun $g \in \mathsf{ker}(T - \overline{z})^\perp \subset L^2_r(a,b)$ und das Fundamentalsystem $\{u, v\}$ von $\mathsf{ker}(T - \overline{z})$ mit $u(b) = (pv')(b) = 0$ und $(pu')(b) = v(b) = 1$. Nach Lemma 2.16 existiert für $(\tau - z)h = g$ genau eine Lösung $h \in \mathsf{dom}(T)$ mit der Anfangsbedingung $h(a) = (ph')(a) = 0$. Daraus folgt mit Satz 2.15 und Bemerkung 2.17

$$\begin{aligned} 0 = \langle g, u\rangle_r = \langle (T - z)h, u\rangle_r &= \langle (T - z)h, u\rangle_r - \langle h, (T - \overline{z})u\rangle_r = \langle Th, u\rangle_r - \langle h, Tu\rangle_r \\ &= [h, u]_a^b = [h, u]_b = \overline{h(b)}(pu)'(b) - \overline{u(b)}(ph')(b) \\ &= \overline{h(b)} \end{aligned}$$

und analog

$$0 = \langle g, v\rangle_r = [h, v]_a^b = \overline{h(b)}(pv)'(b) - \overline{ph'(b)}v(b) = -\overline{(ph')(b)}.$$

Also liegt $h \in \mathsf{dom}(T_0)$ und es gilt $g = (\tau - z)h = (T_0 - z)h \in \mathsf{ran}(T_0 - z)$. Daraus folgt die Inklusion $\mathsf{ker}(T - \overline{z})^\perp \subset \mathsf{ran}(T_0 - z)$, das heißt

$$\mathsf{ran}(T_0 - z) = \mathsf{ker}(T - \overline{z})^\perp.$$

b) Weil $\mathsf{ker}(T - \overline{z})$ nach Lemma 2.16 endlichdimensional und somit abgeschlossen ist, gilt

$$\mathsf{ran}(T_0 - z)^\perp = \mathsf{ker}(T - \overline{z})^{\perp\perp} = \mathsf{ker}(T - \overline{z}) = \mathcal{N}(\tau - \overline{z}). \qquad \square$$

Satz 2.22 *Ist τ regulär, dann gilt*

a) T_0 *ist dicht definiert und symmetrisch,* *b)* $T_0^* = T$,

c) $T^* = T_0$. *Also ist* T_0 *ist ein abgeschlossener Operator.*

Beweis. a) Es sei $h \in \mathsf{dom}(T_0)^\perp \subset L^2_r(a,b)$. Nach Lemma 2.16 existiert eine Lösung $f \in \mathsf{dom}(T)$ von $\tau f = h$. Somit gilt für alle $g \in \mathsf{dom}(T_0)$ gemäß Bemerkung 2.20

$$\langle f, T_0 g\rangle_r = \langle Tf, g\rangle_r = \langle \tau f, g\rangle_r = \langle h, g\rangle_r = 0,$$

das heißt $f \in \mathsf{ran}(T_0)^\perp$. Mit Satz 2.21 folgt $f \in \ker(T)$, also $h = \tau f = Tf = 0$. Somit ist $\mathsf{dom}(T_0)^\perp = \{0\}$. Die Symmetrie von T_0 folgt nun direkt aus Bemerkung 2.20.

b) Aufgrund der Bemerkung 2.20 gilt $T_0 \subset T \subset T_0^*$. Es bleibt also noch $\mathsf{dom}(T_0^*) \subset \mathsf{dom}(T)$ zu zeigen. Es sei dafür $f \in \mathsf{dom}(T_0^*) \subset L^2_r(a,b)$ und $h \in \mathsf{dom}(T)$ eine Lösung von $\tau h = T_0^* f$ nach Lemma 2.16. Dann gilt für jedes $g \in \mathsf{dom}(T_0)$ mit Bemerkung 2.20

$$\langle f, T_0 g\rangle_r = \langle T_0^* f, g\rangle_r = \langle Th, g\rangle_r = \langle h, T_0 g\rangle_r,$$

das heißt $\langle f-h, T_0 g\rangle_r = 0$. Also liegt $f - h \in \mathsf{ran}(T_0)^\perp = \ker(T) \subset \mathsf{dom}(T)$. Wegen $h \in \mathsf{dom}(T)$, liegt auch $f \in \mathsf{dom}(T)$, womit $T_0^* = T$ gezeigt ist.

c) Nach Satz 1.16 c) und Teil b) gilt $T_0 \subset \overline{T_0} = T_0^{**} = T^*$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathsf{dom}(T^*) \subset \mathsf{dom}(T_0)$ gilt. Es sei dazu $f \in \mathsf{dom}(T^*)$. Wegen Teil b) und Satz 1.16 a) ist T abgeschlossen. Daraus folgt $T \supset \overline{T_0} = T_0^{**} = T^*$, das heißt $f \in \mathsf{dom}(T)$ und $Tf = T^* f$. Wir erhalten für alle Funktionen $g \in \mathsf{dom}(T)$

$$\langle Tf, g\rangle_r = \langle T^* f, g\rangle_r = \langle f, Tg\rangle_r.$$

Mit Satz 2.15 gilt $0 = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = [f,g]_a^b$ für alle $g \in \mathsf{dom}(T)$. Wir wählen nun nach Satz 2.18 Funktionen $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathsf{dom}(T)$ mit

$$\begin{aligned}
g_1(a) &= 1, & g_1(b) &= 0, & pg_1'(a) &= 0, & pg_1'(b) &= 0,\\
g_2(a) &= 0, & g_2(b) &= 1, & pg_2'(a) &= 0, & pg_2'(b) &= 0,\\
g_3(a) &= 0, & g_3(b) &= 0, & pg_3'(a) &= 1, & pg_3'(b) &= 0,\\
g_4(a) &= 0, & g_4(b) &= 0, & pg_4'(a) &= 0, & pg_4'(b) &= 1.
\end{aligned}$$

Aus $[f,g_1]_a^b = [f,g_2]_a^b = [f,g_3]_a^b = [f,g_4]_a^b = 0$ folgt nun mit Bemerkung 2.17 sofort $f(a) = f(b) = pf'(a) = pf'(b) = 0$, das heißt $f \in \mathsf{dom}(T_0)$. Demnach sind T^* und

T_0 gleich.

Wegen der Abgeschlossenheit von T^* ist auch T_0 abgeschlossen. $\square$

Satz 2.23 *Im allgemeinen Fall ist T_0' dicht definiert, symmetrisch und abschließbar.*

Beweis. Es sei $f \in L_r^2(a,b)$. Wir zeigen, dass es eine gegen f konvergente Folge in $\mathsf{dom}(T_0')$ gibt.

Wir betrachten offene Intervalle $\Delta_n := (\alpha_n, \beta_n) \subset (a,b),\ n \in \mathbb{N}$, mit $a < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots < \beta_n < \cdots < \beta_1 < b$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir den auf $\Delta_n = (\alpha_n, \beta_n)$ eingeschränkten Differentialausdruck τ mit τ_{Δ_n}. Da dieser regulär ist folgt für den entsprechenden minimalen Operator $T_{\Delta_n,0}$ nach Satz 2.22 die Dichtheit von $\mathsf{dom}(T_{\Delta_n,0})$ in $L_r^2(\Delta_n)$ hinsichtlich der zugehörigen Norm $\|\cdot\|_{\Delta_n,r}$.

Es sei nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $g_n = f\big|_{\Delta_n} \in L_r^2(\Delta_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin erklären wir eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_r^2(a,b)$ folgendermaßen:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in (a, \alpha_n] \\ g_n(x), & x \in \Delta_n \\ 0, & x \in [\beta_n, b) \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N},\ x \in (a,b).$$

Offenbar konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bezüglich der Norm $\|\cdot\|_r$. Es sei also $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\|f_n - f\|_r < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Des Weiteren existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen der Dichtheit von $\mathsf{dom}(T_{\Delta_n,0})$ in $L_r^2(\Delta_n)$ eine Folge $\left(h_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{dom}(T_{\Delta_n,0})$, welche gegen $g_n \in L_r^2(\Delta_n)$ konvergiert, das heißt es existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_n$

$$\left\|h_k^{(n)} - g_n\right\|_{\Delta_n,r} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Wir definieren $h_n := h_{k_n}^{(n)}$ und

$$h_n^*(x) := \begin{cases} 0, & x \in (a, \alpha_n] \\ h_n(x), & x \in \Delta_n \\ 0, & x \in [\beta_n, b) \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N},\ x \in (a,b).$$

Offensichtlich ist die Folge $(h_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{dom}(T_0')$. Wir erhalten für alle $n \geq n_0$

$$\|f - h_n^*\|_r \leq \|f - f_n\|_r + \|f_n - h_n^*\|_r = \|f - f_n\|_r + \|g_n - h_n\|_{\Delta_n,r} < \varepsilon.$$

Somit konvergiert die Folge $(h_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{dom}(T_0')$ gegen $f \in L_r^2(a,b)$, das heißt $\mathsf{dom}(T_0')$ liegt dicht in $L_r^2(a,b)$.

Die Symmetrie und Abschließbarkeit von T_0' folgen aus Bemerkung 2.14 und Bemerkung 1.17. □

Satz 2.24 *Im allgemeinen Fall gilt* $(T_0')^* = T$.

Beweis. Aufgrund der Symmetrie des präminimalen Operators T_0' und Lemma 2.13 gilt $T_0' \subset T \subset (T_0')^*$. Es bleibt also noch $\mathsf{dom}((T_0')^*) \subset \mathsf{dom}(T)$ zu zeigen. Es sei dafür $f \in \mathsf{dom}((T_0')^*) \subset L_r^2(a,b)$. Aufgrund der Definition von $\mathsf{dom}((T_0')^*)$ liegen f und $(T_0')^*f$ in $L_r^2(a,b)$. Es sei $\Delta := (\alpha,\beta) \subset (a,b)$ ein offenes Intervall mit $a < \alpha < \beta < b$. Wir bezeichnen den auf Δ eingeschränkten regulären Differentialausdruck τ mit τ_Δ und betrachten für Δ den entsprechenden minimalen Operator $T_{\Delta,0}$ beziehungsweise den maximalen Operator T_Δ. Weiterhin sei $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Delta,r}$ das zugehörige Skalarprodukt auf $L_r^2(\Delta)$. Es sei nun f_Δ die Einschränkung von f auf Δ. Für eine Funktion $g_\Delta \in \mathsf{dom}(T_{\Delta,0})$ sei deren Fortsetzung g auf (a,b) mittels

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \in (a,\alpha] \\ g_\Delta(x), & x \in \Delta \\ 0, & x \in [\beta, b) \end{cases}$$

erklärt. Offenbar liegt g in $\mathsf{dom}(T_0')$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\langle (T_{\Delta,0})g_\Delta, f_\Delta\rangle_{\Delta,r} &= \langle \tau_\Delta g_\Delta, f_\Delta\rangle_{\Delta,r} = \langle \tau g, f\rangle_r = \langle T_0' g, f\rangle_r = \langle g, (T_0')^* f\rangle_r \\ &= \langle g_\Delta, ((T_0')^* f)\big|_\Delta\rangle_{\Delta,r}.\end{aligned}$$

Nach der Definition des zu $T_{\Delta,0}$ adjungierten Operators liegt $f_\Delta \in \mathsf{dom}((T_{\Delta,0})^*)$ und es stimmen $(T_{\Delta,0})^* f_\Delta$ und $(T_0')^* f$ auf dem Intervall Δ überein. Aufrund der Regularität von τ_Δ erhalten wir mit Satz 2.22 $f_\Delta \in \mathsf{dom}(T_\Delta)$, das heißt

$$(\tau f)\big|_\Delta = \tau_\Delta f_\Delta = T_\Delta f_\Delta = (T_{\Delta,0})^* f_\Delta = ((T_0')^* f)\big|_\Delta.$$

Da für jedes offene Intervall $\Delta := (\alpha,\beta) \subset (a,b)$ mit $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ die Ausdrücke τf und $(T_0')^* f$ auf Δ identisch sind, stimmen τf und $(T_0')^* f$ in (a,b) überein. Es gilt also

$\tau f = (T_0')^* f \in L_r^2(a,b)$. Des Weiteren sind f_Δ und $p(f_\Delta)'$ wegen $f_\Delta \in \mathsf{dom}(T_\Delta)$ für jedes Δ absolut stetige Funktionen in Δ, woraus die absolute Stetigkeit von f und pf' in (a,b) folgt. Damit gilt $f \in \mathsf{dom}(T)$ und somit auch $\mathsf{dom}((T_0')^*) = \mathsf{dom}(T)$. □

Folgerung 2.25 *Im regulären Fall gilt* $\overline{T_0'} = T_0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1.16, Satz 2.22 und Satz 2.24:

$$\overline{T_0'} = (T_0')^{**} = T^* = T_0. \qquad \square$$

Bemerkung 2.26 Es sei A eine selbstadjungierte Realisierung von τ im allgemeinen Fall. Da $A = A^*$ nach Satz 1.16 a) ein abgeschlossener Operator ist, gilt mit Bemerkung 2.14 und Satz 2.24

$$\overline{T_0'} \subset A \subset T.$$

2.3 Selbstadjungierte Realisierungen im regulären Fall

Lemma 2.27 *Eine Realisierung A von τ ist genau dann ein selbstadjungierter Operator, wenn für ihren Definitionsbereich*

$$\mathsf{dom}(A) = D := \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; [f,g]_a^b = 0 \textit{ für alle } g \in \mathsf{dom}(A) \right\}$$

gilt.

Beweis. (1) Es sei A eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Dann gilt nach Folgerung 2.25 und Bemerkung 2.26 die Beziehung $T_0 \subset A \subset T$. Aufgrund der Selbstadjungiertheit erhalten wir für alle $f, g \in \mathsf{dom}(A)$

$$0 = \langle Af, g\rangle_r - \langle f, Ag\rangle_r = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = [f,g]_a^b. \tag{2.9}$$

Es gilt also $\mathsf{dom}(A) \subset D$. Andererseits erhalten wir für $f \in D$ nach der Definition

$$0 = [f,g]_a^b = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, gT\rangle_r = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Ag\rangle_r \quad \text{für alle } g \in \mathsf{dom}(A).$$

Damit folgt $f \in \mathsf{dom}(A^*)$ und wegen der Selbstadjungiertheit $f \in \mathsf{dom}(A)$, womit $\mathsf{dom}(A) = D$ gezeigt ist.

(2) Es sei nun $\mathsf{dom}(A) = D$. Wir zeigen, dass A ein selbstadjungierter Operator ist. Aufgrund der Darstellung von $\mathsf{dom}(A)$ folgt mit Bemerkung 2.20 sofort $T_0 \subset A \subset T$. Somit erhalten wir $A^* \subset T = T_0^*$ und wegen

$$0 = [f,g] = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = \langle Af, g\rangle_r - \langle f, Ag\rangle_r \quad \text{für alle } f, g \in \mathsf{dom}(A)$$

die Symmetrie des Operators A. Insbesondere gilt wegen der Symmetrie $A \subset A^*$. Wir müssen also nur noch $\mathsf{dom}(A^*) \subset \mathsf{dom}(A)$ zeigen. Es sei $f \in \mathsf{dom}(A^*)$. Dann gilt für alle $g \in \mathsf{dom}(A)$

$$0 = \langle A^* f, g\rangle_r - \langle f, Ag\rangle_r = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = [f,g]_a^b.$$

Die Funktion f ist also in $D = \mathsf{dom}(A)$ enthalten. Damit ist die Selbstadjungiertheit von A gezeigt. □

Satz 2.28 *Es sei τ regulär. Ein Operator A ist genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn Matrizen B_a und B_b in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ existieren, sodass die Matrix $[B_a, B_b] \in \mathbb{C}^{2\times 4}$ den Rang zwei besitzt und die Bedingungen*

$$B_a \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_a^* = B_b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_b^* \tag{2.10}$$

sowie

$$\mathsf{dom}(A) = \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; B_a \begin{pmatrix} f(a) \\ (pf')(a) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} f(b) \\ (pf')(b) \end{pmatrix} \right\} \tag{2.11}$$

erfüllt sind.

Beweis. (1) Für Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ existieren nach Satz 2.18 Funktionen $u, v \in \mathsf{dom}(T)$ derart, dass

$$B_a = \begin{bmatrix} \overline{(pu')(a)} & -\overline{u(a)} \\ \overline{(pv')(a)} & -\overline{v(a)} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B_b = \begin{bmatrix} \overline{(pu')(b)} & -\overline{u(b)} \\ \overline{(pv')(b)} & -\overline{v(b)} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

gilt. Diese sind jedoch im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Andersherum lassen sich wegen Satz 2.16 c) zu gegebenen Funktionen $u, v \in \mathsf{dom}(T)$ Matrizen B_a und

B_b zuordnen, sodass (2.12) erfüllt ist. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$B_a \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_a^* = - \begin{bmatrix} [u,u]_a & [u,v]_a \\ [v,u]_a & [v,v]_b \end{bmatrix}$$

und

$$B_b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_b^* = - \begin{bmatrix} [u,u]_b & [u,v]_b \\ [v,u]_b & [v,v]_b \end{bmatrix}.$$

Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Äquivalenz der Bedingung (2.10) und der Existenz zweier Funktionen $u, v \in \mathsf{dom}(T)$ mit

$$[u,u]_a^b = [u,v]_a^b = [v,u]_a^b = [v,v]_a^b = 0. \tag{2.13}$$

Im Folgenden bezeichnen wir für zwei Funktionen $u, v \in \mathsf{dom}(T)$ mit $\operatorname{span}\{u,v\}$ den Vektorraum aller Linearkombinationen von u und v über $\mathbb{C}$. Eine Funktionen $f \in \mathsf{dom}(T)$ liegt genau dann in $\mathsf{dom}(T_0)$, wenn

$$f(a) = (pf')(a) = f(b) = (pf')(b) = 0$$

erfüllt ist. Somit gilt für zwei Funktionen $u, v \in \mathsf{dom}(T)$ genau dann $\operatorname{span}\{u,v\} \cap \mathsf{dom}(T_0) = \{0\}$, wenn für Matrizen B_a und B_b wie in (2.12) die Zeilen der Matrix $[B_a, B_b]$ linear unabhängig in $\mathbb{C}^4$ sind, also die Matrix $[B_a, B_b]$ Rang zwei besitzt.

(2) Es sei nun A eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Nach Lemma 2.16 gilt für die Defektzahlen von T_0

$$\gamma_+(T_0) = \dim \mathsf{ker}(T - \mathrm{i}) = \gamma_-(T_0) = \dim \mathsf{ker}(T + \mathrm{i}) = 2.$$

Somit ist der Operator A wegen Satz 1.21 eine symmetrische Fortsetzung von T_0 mit

$$\mathsf{dom}(A) = \mathsf{dom}(T_0) \dot{+} \operatorname{span}\{u,v\}, \tag{2.14}$$

wobei u und v Funktionen aus $\mathsf{dom}(T)$ sind, für die $\operatorname{span}\{u,v\} \cap \mathsf{dom}(T_0) = \{0\}$ gilt. Wir ordnen den Funktionen u, v wie in (2.12) die Matrizen B_a und B_b zu. Dabei ist der Rang der Matrix $[B_a, B_b]$ gleich zwei. Aus der Selbstadjungiertheit des Operators

A folgt nun für alle $f, g \in \mathsf{dom}(A)$ mit Satz 2.15

$$0 = \langle Af, g\rangle_r - \langle f, Ag\rangle_r = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = [f, g]_a^b, \tag{2.15}$$

also insbesondere (2.13) und somit auch die Gleichung (2.10). Mit Lemma 2.27 und (2.14) ergibt sich

$$\mathsf{dom}(A) = \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; [f, g]_a^b = 0 \text{ für alle } g \in \mathsf{dom}(T_0) \dotplus \operatorname{span}\{u, v\} \right\} =: D.$$

Zusammen mit der Beziehung

$$[f, g]_a^b = 0 \quad \text{für } f \in \mathsf{dom}(T) \text{ und } g \in \mathsf{dom}(T_0) \tag{2.16}$$

erhalten wir durch Teil (1)

$$\begin{aligned} D &= \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; [f, g]_a^b = 0 \text{ für alle } g \in \mathsf{dom}(T_0) \dotplus \operatorname{span}\{u, v\} \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; [f, g]_a^b = 0 \text{ für alle } g \in \operatorname{span}\{u, v\} \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; [f, u]_a^b = [f, v]_a^b = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathsf{dom}(T) \;\middle|\; B_a \begin{pmatrix} f(a) \\ (pf')(a) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} f(b) \\ (pf')(b) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Somit gilt auch die Eigenschaft (2.11).

(3) Es seien nun die Matrizen B_a und B_b gegeben, welche die Rangbedingung und die Gleichung (2.10) erfüllen. Wir zeigen dass eine Realisierung A von τ mit dem wie in (2.11) gegebenen Definitionsbereich einen selbstadjungierten Operator darstellt. Dazu wählen wir wie oben beschrieben zwei Funktionen $u, v \in \mathsf{dom}(T)$, sodass (2.12) gilt. Da der Rang der Matrix $[B_a, B_b]$ gleich zwei ist, erhalten wir nach Teil (1) für die so gewählten Funktionen $\operatorname{span}\{u, v\} \cap \mathsf{dom}(T_0) = \{0\}$. Aus der Bedingung (2.10) folgen wegen der oben erwähnten Äquivalenz für die Funktionen u, v die Gleichungen in (2.13). Zusammen mit der Definition von $\mathsf{dom}(A)$, (2.17), (2.16) und (2.13) ergibt sich nun direkt

$$\mathsf{dom}(A) \supset \mathsf{dom}(T_0) \dotplus \operatorname{span}\{u, v\}. \tag{2.18}$$

Wir betrachten die Vektoren

$$(u(a), (pu')(a), -u(b), -(pu')(b))^T \quad \text{und} \quad (v(a), (pv')(a), -v(b), -(pv')(b))^T$$

in $\mathbb{C}^4$. Da die Matrix $[B_a, B_b]$ den Rang zwei besitzt, sind diese linear unabhängig in $\mathbb{C}^4$. Außerdem liegen sie wegen (2.18) im Kern der Matrix $[B_a, B_b]$, welcher die Dimension zwei besitzt. Es sei $w \in \mathsf{dom}(A)$, das heißt $w \in \mathsf{dom}(T)$ und

$$(w(a), (pw')(a), -w(b), -(pw')(b))^T \in \mathsf{ker}([B_a, B_b]).$$

Somit existiert eine Linearkombination $g := w - \alpha u - \beta v \in \mathsf{dom}(T)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sodass

$$(g(a), (pg')(a), -g(b), -(pg')(b))^T = (0, 0, 0, 0)^T$$

gilt, das heißt $g \in \mathsf{dom}(T_0)$. Insbesondere folgt daraus aber, dass $w = g + \alpha u + \beta v \in \mathsf{dom}(T_0) \dotplus \mathrm{span}\{u, v\}$ gilt. Also sind die Räume $\mathsf{dom}(A)$ und $\mathsf{dom}(T_0) \dotplus \mathrm{span}\{u, v\}$ gleich. Offensichtlich ist A ein symmetrischer Operator, da alle Funktionen $f, g \in \mathsf{dom}(A)$ die Gleichung

$$0 = [f, g]_a^b = \langle Tf, g\rangle_r - \langle f, Tg\rangle_r = \langle Af, g\rangle_r - \langle f, Ag\rangle_r$$

erfüllen. Nach Satz 1.21 stellt A also eine selbstadjungierte Realisierung von des Differentialausdrucks τ dar. □

Satz 2.29 *Es sei τ regulär und A eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Dann besitzt für $\lambda \in \rho(A)$ die Resolvente $R(A, \lambda)$ angewandt auf $f \in L^2_r(a, b)$ die Form*

$$(R(A, \lambda)f)(x) = \int_a^b k(x, t; \lambda) f(t) r(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in (a, b) \tag{2.19}$$

mit einem beschränkten Integralkern $k(\cdot, \cdot; \lambda) : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$. Dabei liegt die Abbildung $(x, t) \mapsto (r(x))^{\frac{1}{2}} k(x, t; \lambda)(r(t))^{\frac{1}{2}}$ in $L^2([a, b] \times [a, b])$.

Beweis. Es sei $f \in L^2_r(a, b)$ und $\lambda \in \rho(A)$. Offenbar löst die Funktion $g := R(A, \lambda)f \in \mathsf{dom}(A)$ die Gleichung $(\tau - \lambda)g = f$. Es sei $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem von $\mathsf{ker}(T - \lambda)$.

Nach Satz 2.5 existieren in Abhängigkeit von f Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, sodass

$$\begin{aligned}(R(A,\lambda)f)(x) &= g(x)\\ &= c_1 u(x) + c_2 v(x)\\ &\quad + \frac{1}{W\{u,v\}}\left(u(x)\int_a^x v(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t - v(x)\int_a^x u(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{2.20}$$

gilt. Für die selbstadjungierte Realisierung A seien Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ wie in Satz 2.28 gewählt. Da $\mathsf{ran}(R(A,\lambda)) = \mathsf{dom}(A)$ gilt, erfüllt die Funktion g die Randbedingungen

$$B_a \begin{pmatrix} g(a) \\ (pg')(a) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} g(b) \\ (pg')(b) \end{pmatrix}.$$

Dabei sind nach (2.20)

$$g(a) = c_1 u(a) + c_2 v(a), \quad (pg')(a) = c_1 (pu')(a) + c_2 (pv')(a),$$

$$\begin{aligned}g(b) &= c_1 u(b) + c_2 v(b)\\ &\quad + \frac{1}{W\{u,v\}}\left(u(b)\int_a^b v(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t - v(b)\int_a^b u(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(pg')(b) &= c_1 (pu')(b) + c_2 (pv')(b)\\ &\quad + \frac{1}{W\{u,v\}}\left((pu')(b)\int_a^b v(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t - (pv')(b)\int_a^b u(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Für

$$\widetilde{B}_a := B_a \begin{bmatrix} u(a) & v(a) \\ (pu')(a) & (pv')(a) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{B}_b := B_b \begin{bmatrix} u(b) & v(b) \\ (pu')(b) & (pv')(b) \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$\widetilde{B}_a \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \widetilde{B}_b \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{W\{u,v\}} \widetilde{B}_b \begin{pmatrix} \int_a^b v(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t \\ -\int_a^b u(t)f(t)r(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Angenommen die Matrix $(\widetilde{B}_a - \widetilde{B}_b)$ besäße keinen vollen Rang. Dann würde eine nichttriviale Lösung $d = (d_1, d_2)^T \in \mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems

$$(\widetilde{B}_a - \widetilde{B}_b)d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

existieren. Für diese würde die Funktion $h := d_1 u + d_2 v \in \mathsf{ker}(T - \lambda) \subset \mathsf{dom}(T)$ folglich die Randbedingung

$$B_a \begin{pmatrix} h(a) \\ (ph')(a) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} h(b) \\ (ph')(b) \end{pmatrix}$$

erfüllen und somit in $\mathsf{dom}(A)$ liegen. Des Weiteren würde $(A - \lambda)h = (T - \lambda)h = 0$ gelten. Also wäre λ ein Eigenwert bezüglich des Operators A, was aber im Widerspruch zu $\lambda \in \rho(A)$ stünde.

Die Matrix $(\widetilde{B}_a - \widetilde{B}_b)$ ist also invertierbar, woraus

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{W\{u,v\}} (\widetilde{B}_a - \widetilde{B}_b)^{-1} \widetilde{B}_b \begin{pmatrix} \int_a^b v(t) f(t) r(t) \,\mathrm{d}t \\ -\int_a^b u(t) f(t) r(t) \,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{1}{W\{u,v\}} (\widetilde{B}_a - \widetilde{B}_b)^{-1} \widetilde{B}_b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} \int_a^b u(t) f(t) r(t) \,\mathrm{d}t \\ \int_a^b v(t) f(t) r(t) \,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

folgt.

Die Vorfaktoren c_1, c_2 lassen sich als Linearkombinationen der Integrale aus (2.21) darstellen. Da die Matrix $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ nur von u und v abhängt, hängen die Koeffizienten in diesen Linearkombinationen ebenfalls nur von u und v ab. Sie sind also insbesondere unabhängig von f.

Es ergibt sich mit (2.20) für beliebiges $f \in L^2_r(a,b)$ folgende Darstellung für die Resolvente

$$\begin{aligned}
\left(R(A,\lambda)f\right)(x) = &\int_a^b \left\{ \big(u(x), v(x)\big) B \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\} f(t) r(t) \,\mathrm{d}t \\
&+ \int_a^b \left\{ \big(u(x), v(x)\big) \begin{pmatrix} \chi_{[a,x]}(t) v(t) \\ -\chi_{[a,x]}(t) u(t) \end{pmatrix} \right\} f(t) r(t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Wir definieren nun in Abhängigkeit von u und v die messbare Funktion $k(\cdot,\cdot;u,v)$:

$[a,b]^2 \to \mathbb{C}$,

$$(x,t) \mapsto k(x,t;u,v) := \big(u(x), v(x)\big) \left(B + \begin{bmatrix} 0 & \chi_{[a,x]}(t) \\ -\chi_{[a,x]}(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Diese ist wegen der Stetigkeit der Funktionen u und v beschränkt auf $[a,b]^2$. Damit gilt

$$\left(R(A,\lambda)f\right)(x) = \int_a^b k(x,t;u,v) f(t) r(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Die Funktion k ist nicht von der Wahl des Fundamentalsystems $\{u,v\}$ des Eigenraums $\mathsf{ker}(T-\lambda)$ abhängig, sondern nur von λ selbst. Betrachten wir dafür eine zweites Fundamentalsystem $\{\tilde{u},\tilde{v}\}$ von $\mathsf{ker}(T-\lambda)$. Dann gilt für alle $f \in L^2_r(a,b)$ und jedes $x \in [a,b]$ nach (2.22)

$$0 = \int_a^b \left(k(x,t;u,v) - k(x,t,\tilde{u},\tilde{v})\right) f(t) r(t)\,\mathrm{d}t = \langle k(x,\cdot;u,v) - k(x,\cdot;\tilde{u},\tilde{v}), f\rangle_r.$$

Wir können also die Funktion k in Abhängigkeit von λ auffassen, $k(\cdot,\cdot;\lambda) := k(\cdot,\cdot;u,v)$.

Aus der Integrierbarkeit von r über $[a,b]$ und der Beschränktheit von $k(\cdot,\cdot;\lambda)$ folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]^2} \left| (r(x))^{\frac{1}{2}} k(x,t;\lambda)(r(t))^{\frac{1}{2}} \right|^2 \mathrm{d}(x,t) &= \int_a^b \int_a^b r(x)|k(x,t;\lambda)|^2 r(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \int_a^b r(x)r(t) \sup_{(\xi,\eta)\in[a,b]^2} |k(\xi,\eta;\lambda)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sup_{(\xi,\eta)\in[a,b]^2} |k(\xi,\eta;\lambda)|^2 \cdot \left(\int_a^b r(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

□

Satz 2.30 *Es sei τ regulär und A eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2_r(a,b)$ aus Eigenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von A. Die zugehörige Folge aus Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält dabei alle Eigenwerte von A, wobei die Vielfachheit der Eigenwerte höchstens zwei beträgt. Hinsichtlich dieser Folge konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \lambda_n \neq 0}} |\lambda_n|^{-2}.$$

Darüber hinaus besitzt A für $f \in \mathsf{dom}(A)$ die Darstellung

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f_n, f \rangle_r f_n. \tag{2.23}$$

Beweis. (1) Nach Satz 2.3 besitzt jeder Eigenwert der Realisierung A höchstens die Vielfachheit zwei.

(2) Es sei $\lambda \in \rho(A)$ und $R(A, \lambda) = (A - \lambda)^{-1}$ die zugehörige Resolvente. Wir betrachten die Darstellung der Resolvente $R(A, \lambda)$ aus Satz 2.29 und definieren einen Operator $V : L^2(a, b) \to L^2(a, b)$,

$$(Vf)(x) := (r(x))^{\frac{1}{2}} (R(A, \lambda)(r^{-\frac{1}{2}} f))(x) = \int_a^b (r(x))^{\frac{1}{2}} k(x, t; \lambda)(r(t))^{\frac{1}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{2.24}$$

Wegen der Injektivität von $R(A, \lambda)$ ist auch V ein injektiver Operator. Wir zeigen außerdem, dass V ein *normaler* Operator ist, das heißt dass die Identität $VV^* = V^*V$ gilt. Nach Lemma 1.19 liegt $\overline{\lambda}$ ebenfalls in der Resolventenmenge $\rho(A)$ und es gilt $R(A, \lambda)^* = R(A, \overline{\lambda})$. Daraus folgt für alle $f, g \in L^2(a, b)$

$$\begin{aligned}
\langle Vf, g \rangle_{L^2} &= \int_a^b \overline{(R(A, \lambda)(r^{-\frac{1}{2}} f))(x)} (r(x))^{-\frac{1}{2}} g(x) r(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \langle (R(A, \lambda)(r^{-\frac{1}{2}} f), r^{-\frac{1}{2}} g \rangle_r \\
&= \langle r^{-\frac{1}{2}} f, R(A, \overline{\lambda})(r^{-\frac{1}{2}} g) \rangle_r \\
&= \int_a^b \overline{(r(x))^{-\frac{1}{2}} f(x)} (R(A, \overline{\lambda})(r^{-\frac{1}{2}} g))(x) r(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \langle f, r^{\frac{1}{2}} (R(A, \overline{\lambda})(r^{-\frac{1}{2}} g)) \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Der adjungierte Operator V^* besitzt also die Gestalt

$$V^* f = r^{\frac{1}{2}} (R(A, \overline{\lambda})(r^{-\frac{1}{2}} f)) \quad \text{für alle } f \in L^2(a, b). \tag{2.25}$$

Mit der Resolventenidentität aus Lemma 1.19 folgt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$R(A, \lambda) R(A, \overline{\lambda}) = \frac{R(A, \lambda) - R(A, \overline{\lambda})}{\lambda - \overline{\lambda}} = R(A, \overline{\lambda}) R(A, \lambda).$$

Im Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich ebenfalls $R(A, \lambda) R(A, \overline{\lambda}) = R(A, \overline{\lambda}) R(A, \lambda)$. Aus der Darstellung von V^* in (2.25) resultiert die Normalität von V. Wegen der Darstellung des Operators V in (2.24) als Integraloperator mit einem Kern aus $L^2([a,b]\times[a,b])$ ist V ein sogenannter *Hilbert-Schmidt-Operator* (vergleiche [9, Satz VI.6.3 und Abschnitt VI.6]. Da der Operator V außerdem normal und injektiv ist, existiert nach [9, Theorem VI.3.2] ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2(a,b)$ aus Eigenfunktionen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(a,b)$ von V zu den Eigenwerten $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dabei lässt sich V für $g \in L^2(a,b)$ durch

$$Vg = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle v_n, f\rangle_{L^2} v_n.$$

darstellen. Für die Eigenwerte gilt als definierende Eigenschaft eines Hilbert-Schmidt-Operators die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2$.

Es sei nun $f \in L_r^2(a,b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
R(A,\lambda)f &= r^{-\frac{1}{2}} V(r^{\frac{1}{2}} f) = r^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle v_n, r^{\frac{1}{2}} f\rangle_{L^2} v_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n r^{-\frac{1}{2}} v_n \int_a^b \overline{v_n(t)} (r(t))^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n r^{-\frac{1}{2}} v_n \int_a^b \overline{(r(t))^{-\frac{1}{2}} v_n(t)} f(t) r(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle r^{-\frac{1}{2}} v_n, f\rangle_r r^{-\frac{1}{2}} v_n.
\end{aligned}$$

Offensichtlich stellt für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n := r^{-\frac{1}{2}} v_n$ eine Eigenfunktion der Resolvente $R(A,\lambda)$ bezüglich des Eigenwertes μ_n dar. Außerdem bildet die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{dom}(A)$ ein vollständiges Orthonormalsystem des $L_r^2(a,b)$.

(3) Für einen Eigenwert $\mu \in \sigma(A)$ mit der zugehörigen Eigenfunktion $u \in \mathsf{ker}(A-\mu)$ gilt

$$(\mu-\lambda)R(A,\lambda)u = R(A,\lambda)Au - \lambda R(A,\lambda)u = R(A,\lambda)(A-\lambda)u = u.$$

Somit stellt $\frac{1}{\mu-\lambda}$ einen Eigenwert der Resolvente $R(A,\lambda)$ dar und es gilt

$$u \in \mathsf{ker}\left(R(A,\lambda) - \frac{1}{\mu-\lambda} \right).$$

Umgekehrt erhalten wir für einen Eigenwert $\mu_n \in \sigma(R(A,\lambda))$ mit der zugehörigen

Eigenfunktion $f_n \in \mathsf{ker}(R(A,\lambda) - \mu_n)$ und $\lambda_n := \mu_n^{-1} + \lambda$

$$(A - \lambda_n)f_n = \mu_n^{-1}(A - \lambda)(\mu_n f_n) - \mu_n^{-1} f_n = \mu_n^{-1}(A - \lambda)R(A,\lambda)f_n - \mu_n^{-1} f_n = 0,$$

das heißt λ_n ist Eigenwert des Operators A bezüglich der Eigenfunktion f_n.

Die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma(A)$ enthält somit alle Eigenwerte des Operators A und die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{dom}(A)$ stellt ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2_r(a,b)$ aus Eigenfunktionen von A dar. Daraus folgt insbesondere die Darstellung (2.23) von A.

Da der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2$ existiert, konvergiert die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null und es gilt

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \lambda_n \neq 0}} |\lambda_n|^{-2} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \mu_n\lambda \neq -1}} \frac{|\mu_n|^2}{|1 + \mu_n\lambda|^2} \leq \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \mu_n\lambda \neq -1}} \frac{1}{|1 + \mu_n\lambda|^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 < \infty. \qquad \square$$

Literaturverzeichnis

[1] W. O. AMREIN, A. M. HINZ, D. B. PEARSON, *Sturm-Liouville Theory: Past and Present*, Birkhäuser, 2005.

[2] J. ELSTRODT, *Maß- und Integrationstheorie*, 7. Auflage, Springer, 2011.

[3] J. LIOUVILLE, C.-F. STURM, Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable, *Journ. Math. Pures Appl.*, Band 2, 220–223, 1837.

[4] C.-F. STURM, Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *Journ. Math. Pures Appl.*, Band 1, 106–186, 1836.

[5] J. WEIDMANN, Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren, *Math. Zeitschr.*, Band 98, 268–302, 1967.

[6] J. WEIDMANN, Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, *Lect. Notes Math.*, Band 1258, Springer, 1987.

[7] J. WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen*, B. G. Teubner, 2000.

[8] J. WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II: Anwendung*, B. G. Teubner, 2003.

[9] D. WERNER, *Funktionalanalysis*, 5. Auflage, Springer, 2005.

[10] H. WEYL, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Annalen*, Band 68, 220–269, 1910.

[11] A. ZETTL, Sturm-Liouville Theory, *Mathematical Surveys and Monographs*, Band 121, American Mathematical Society, 2005.