

Masterarbeit

ZUR WKB-NÄHERUNG FÜR LÖSUNGEN GEWÖHNLICHER  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN EINER KOMPLEXEN  
VERÄNDERLICHEN

vorgelegt von

Philipp Schmitz

betreut durch

Prof. Dr. Carsten Trunk



TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Fachgebiet für angewandte Funktionalanalysis

September 2015



Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine weiteren als die angegebenen Hilfsmittel benutzt sowie die Stellen der Arbeit, die in anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, durch Angaben der Quellen sichtbar gemacht wurden.

Ilmenau, 10. September 2015

Ort, Datum

---

Philipp Schmitz



## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird für Lösungen gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form  $f'' = (p + q)f$  das Wachstumsverhalten mit Hilfe der WKB-Näherung untersucht. Neben Problemen entlang der reellen Achse werden insbesondere Differentialgleichungen innerhalb einfach zusammenhängender Gebiete betrachtet. Ein Schwerpunkt ist die Konstruktion von Fehlerschranken für die WKB-Näherungen. Dieses Problem wird auf eine Volterra-Integralgleichung zurückgeführt, wobei in dieser Arbeit eine Aussage über das Wachstumsverhalten von Lösungen bewiesen wird. Die Resultate der WKB-Methode werden für den Fall polynomieller Koeffizienten angewendet. Dabei werden Lösungen konstruiert, die in bestimmten Bereichen (Stokes wedges und Stokes lines) der komplexen Zahlenebene mit exponentieller Geschwindigkeit wachsen beziehungsweise gegen Null konvergieren. Dieser Fall spielt eine herausragende Rolle in der sogenannten  $\mathcal{PT}$ -Quantenmechanik.

## Abstract

In this thesis we study ordinary linear differential equations  $f'' = (p + q)f$ . By means of WKB-approximation the asymptotic behaviour of solutions is investigated. The differential equation is defined on a simply connected domain with analytic functions  $p$  and  $q$ . One aim is to construct bounds for the WKB-approximation. This is done by solving a Volterra integral equation. As an application we use the WKB-method for polynomial coefficients  $p$  and  $q$ . This situation is currently intensive studied in Theoretical Physics (so called  $\mathcal{PT}$  quantum mechanics). We obtain solutions which exponentially decay or exponentially diverge in a certain area (Stokes wedges and Stokes lines) of the complex plane.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Analytische Funktionen . . . . .	5
2.2	Differentialgleichungssysteme einer reellen Veränderlichen . . . . .	8
2.3	Differentialgleichungen höherer Ordnung einer reellen Veränderlichen . . . . .	9
2.4	Differentialgleichungssysteme einer komplexen Veränderlichen . . . . .	9
2.5	Differentialgleichungen höherer Ordnung einer komplexen Veränderlichen . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Die WKB-Näherung</b>	<b>15</b>
3.1	Die WKB-Näherung für reelle Variablen . . . . .	15
3.2	Die WKB-Näherung für komplexe Variablen . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Anwendung der WKB-Näherung auf Differentialgleichungen mit polynomiellen Koeffizienten</b>	<b>45</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>59</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>61</b>





# 1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir für gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen der Form

$$f''(x) = (p(x) + q(x))f(x) \tag{1.1}$$

das Wachstumsverhalten von Lösungen mit Hilfe der WKB-Näherung. Dabei liegt das Hauptaugenmerk neben Problemen entlang der reellen Achse (reeller Fall) auf der Betrachtung der Differentialgleichung (1.1) in einfach zusammenhängenden Gebieten der komplexen Zahlenebene (komplexer Fall) mit analytischen Koeffizientenfunktionen  $p$  und  $q$ . Inspiriert von den Ausführungen in *F. Olver* [39] betrachten wir eine Methode zur Erweiterung der WKB-Näherung für Differentialgleichungen zweiter Ordnung einer komplexen Veränderlichen.

Neben dem klassischen Einsatz in der Quantenmechanik zur Bestimmung von Lösungen der Schrödingergleichung, beispielsweise beim Tunneleffekt (vergleiche [23, 24]), liefert insbesondere die komplexe WKB-Methode eine Anwendung für die Untersuchung von sogenannten  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Quantensystemen, siehe [17, 21].  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass die Bedingung der Hermitizität des zugehörigen Hamiltonoperators durch die schwächere Voraussetzung der  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie ersetzt wird.  $\mathcal{P}$  ist dabei die Raumreflektion und  $\mathcal{T}$  die Zeitumkehr, wobei  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie die Kommutativität des Hamiltonoperators mit Raum-Zeit-Umkehr  $\mathcal{PT}$  charakterisiert. Dieses Konzept wurde 1998 erstmals von *C. M. Bender* und *S. Boettcher* in ihrer Arbeit [7] vorgestellt. Diese Veröffentlichung bildet die Grundlage zahlreicher neuer Untersuchungen. So wurden zum Beispiel  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Störungen hermitescher Operatoren in [2, 11, 12, 13] betrachtet, Erweiterungstheorie wurde in [1, 3, 4, 5, 6, 31] auf  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Operatoren angewandt und  $\mathcal{PT}$ -Symmetrie wurde in den Arbeiten [6, 32, 36] im Kontext selbstadjungierter Operatoren im Kreinraum studiert. Außerdem wurden Untersuchungen mittels asymptotischer Methoden ähnlich zur WKB-Näherung in [44, 45] durchgeführt. Für einen Überblick über den Stand der Forschung verweisen wir auf [8, 35, 37].

Von besonderem Interesse ist die Lage der Spektren  $\mathcal{PT}$ -symmetrischer Hamiltonoperatoren, insbesondere die Frage, ob die Eigenwerte reell und positiv sind. Eine in diesem Zusammenhang häufig studierte Klasse  $\mathcal{PT}$ -symmetrischer Hamiltonoperatoren ist, vergleiche [7],

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - (ix)^N \tag{1.2}$$

mit einer reellen Konstanten  $N$ . Für das assoziierte Eigenwertproblem ergibt sich die Diffe-

rentialgleichung

$$-y''(z) - (iz)^N y(z) = \lambda y(z), \quad z \in \Gamma \quad (1.3)$$

mit einem komplexen Eigenwertparameter  $\lambda$ , wobei  $\Gamma$  eine Kurve in der komplexen Zahlenebene darstellt. Bereits in [7] wurde vermutet, dass sich für  $\mathcal{PT}$ -symmetrische Probleme der Form (1.2) das gesamte Spektrum auf der reellen Achse befindet. In [17] wurde für diese Vermutung ein Beweis vorgestellt. Für den speziellen Fall  $N = 3$  und  $\Gamma = \mathbb{R}$  wurde von *I. Giordanlli* und *M. Graf* in [21] mit Hilfe der WKB-Methode für den zugehörigen Hamiltonoperator die Positivität des Punktspektrums mathematisch rigoros nachgewiesen.

Namensgebend für die WKB-Näherung sind die Physiker *G. Wentzel* [50], *H. Kramers* [30] und *L. Brillouin* [10], welche diese Technik unabhängig in ihren im Jahr 1926 veröffentlichten Arbeiten zur Quantenmechanik über Lösung der Schrödingergleichung nutzten. Das dortige Verfahren ähnelt dem in einer früheren Arbeit von *H. Jeffreys* [29] aus dem Jahr 1924, weshalb diese Methode inzwischen auch als *JWKB*-Näherung bezeichnet wird. Neben diversen Permutationen der Initialen existieren außerdem weitere Bezeichnungen. So findet sich diese Näherung bereits in unabhängigen Arbeiten von *J. Liouville* [33] und *G. Green* [22], weswegen einige Autoren, darunter auch *F. Olver*, die Bezeichnung *Liouville-Green-Approximation* bevorzugen. Neben den genannten Personen verwendeten bereits *F. Carlini* in seiner Abhandlung über die Himmelsmechanik [14], *Baron Rayleigh* [41] und *R. Gans* [20] in ihren Arbeiten sowie *W. Heisenberg* [25] in seiner Dissertationschrift über Strömungsmechanik zur WKB-Näherung ähnliche Methoden.

Ausgangspunkt für die WKB-Näherung ist die Konstruktion von Lösungen für die Differentialgleichung (1.1) der Form

$$f(x) = (p(x))^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm \int_{x_0}^x (p(y))^{\frac{1}{2}} dy\right) (1 + R(x)) \quad (1.4)$$

mit einer von den Funktionen  $p$  und  $q$  abhängigen Funktion  $R$ . Neben weiteren Voraussetzungen darf hier  $p$  keine Nullstellen besitzen. Durch Streichung des Terms  $R(x)$  in (1.4) erhält man Approximationen von Lösungen der Differentialgleichung (1.1), welche als WKB-Näherungen bezeichnet werden. Wie gut diese Approximationen das Verhalten der tatsächlichen Lösungen widerspiegeln, hängt dabei von der Funktion  $R$  ab. Von besonderem Interesse ist dabei die Untersuchung der Güte dieser Näherungsmethode mittels Konstruktion von Schranken für die Funktion  $R$ . In der vorliegenden Arbeit werden sowohl im reellen als auch im komplexen Fall für  $R$  Schranken der Form

$$|R(x)| \leq \exp\left(\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy\right) - 1 \quad (1.5)$$

nachgewiesen. Dabei hängt die Funktion  $\mathcal{E}$  von den Koeffizienten  $p$  und  $q$  ab. Anders als im reellen Fall gilt die Abschätzung (1.5) nur entlang bestimmter Wege.

In dieser Arbeit wird das Vorgehen von *F. Olver* erweitert. Während bei *F. Olver* im reellen Fall vorausgesetzt wird, dass der Koeffizient  $p$  nur positive beziehungsweise nur negative Werte annimmt, erlaubt unsere Vorgehensweise, dass  $p$  von der Form  $p = \mu \cdot r$  ist mit einer positiven Funktion  $r$  und einer komplexen Zahl  $\mu \neq 0$ . Diese Verallgemeinerung zeichnet sich dadurch aus, dass sie direkt für Untersuchung von Eigenwertproblemen der Form  $f'' = (\mu + q)f$  einer reellen Veränderlichen mit dem komplexen Eigenwertparameter  $\mu$  anwendbar ist. Die komplexe WKB-Methode hingegen lässt sich auf  $\mathcal{PT}$ -symmetrischen Problemen wie in (1.3) anwenden. So untersuchen wir in dieser Arbeit für die Differentialgleichung (1.1) mit Polynomen  $p$  und  $q$  in der komplexen Ebene das Wachstumsverhalten von Lösungen mit Hilfe der WKB-Methode.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Teile. Im ersten Kapitel wiederholen wir grundlegende Aussagen der Funktionentheorie sowie der Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen. Ein Schwerpunkt bilden dabei Differentialgleichungssysteme einer komplexen Veränderlichen über einfach zusammenhängenden Gebieten. Anschließend vollziehen wir im zweiten Kapitel in Anlehnung an [39] für die Differentialgleichung (1.1) die Konstruktion von Lösungen der Form (1.4). Die Abschätzung der Funktion  $R$  kann dabei auf eine Volterra-Integralgleichung zurückgeführt werden. Ein zentraler Satz dieser Arbeit ist eine Aussage über Volterra-Integralgleichungen und die Existenz von Lösungen sowie deren Wachstumsverhalten. Im Hinblick auf die Differentialgleichung (1.1) einer reellen Veränderlichen wird in dieser Arbeit das Vorgehen von *F. Olver* erweitert. Insbesondere behandeln wir neben positiven beziehungsweise negativen Koeffizientenfunktionen  $p$  wie in [39] auch den allgemeineren Fall  $p = \mu \cdot r$  mit einer komplexen Konstante  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und einer positiven Funktion  $r$ . Im letzten Kapitel wenden wir die Resultate der komplexen WKB-Näherung auf lineare Differentialgleichungen der Form

$$f''(z) = \left( \alpha z^n + \sum_{k=0}^m a_k z^k \right) f(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.6)$$

mit polynomiellen Koeffizientenfunktionen an. Dabei sind  $\alpha$  eine positive Konstante,  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl und  $m < \frac{n}{2} - 1$  eine nichtnegative, ganze Zahl. Durch eine Substitution lässt sich (1.3) im Fall einer natürlichen Zahl  $N$  in die Form (1.6) überführen. Ähnlich wie in [21], wo der Fall  $\alpha = 1$ ,  $n = 3$  und  $m = 0$  betrachtet wurde, lässt sich nun (1.6) behandeln. Dazu zerteilen wir die komplexe Zahlenebene in die offene Sektoren

$$S_\ell = \left\{ e^{\frac{2i\pi\ell}{n+2}} y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(y)| < \frac{\pi}{n+2} \right\}, \quad \ell \in \{0, \dots, n+1\}.$$

Die Sektoren  $S_\ell$  heißen auch *Stokes wedges* (vergleiche [7, 45]). Wir erhalten Lösungen  $f_0, \dots, f_{n+1}$  der Differentialgleichung (1.6), sodass die Funktion  $f_\ell$  für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$  jeweils innerhalb des Sektors  $S_\ell$  mit exponentieller Geschwindigkeit für  $z \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, während sie in den beiden benachbarten Sektoren für  $z \rightarrow \infty$  exponentiell wächst. Dieses Resultat bestätigt die Ergebnisse von *K. Shin* [45] bezüglich der Differentialgleichung

(1.6), welche auf einer asymptotischen Abschätzung aus dem Buch [46] von *Y. Sibuya* basieren.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Analytische Funktionen

Dieser Abschnitt ist der Wiederholung einiger Begriffe und Aussagen bezüglich analytischer Funktionen gewidmet. Mit  $\mathcal{A}(U, \mathbb{C})$  bezeichnen wir in dieser Arbeit für eine offene Teilmenge  $U$  der komplexen Zahlen den Raum aller analytischen Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Betrachtet man für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  eine analytische Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  so erhält man als Folgerung des *Cauchyschen Integralsatz* (unter anderen in [9]), dass für einen Weg  $\gamma$  in  $D$ , also eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ , das Wegintegral über  $f$  nur von den Anfangs- und Endpunkten des Weges  $\gamma$  abhängt. Diese Voraussetzungen rechtfertigen für zwei Punkte  $z, z_0 \in D$  die im Folgenden verwendete Notation

$$\int_{z_0}^z f(y) dy \quad (2.1)$$

für das Wegintegral entlang eines Weges zwischen beiden Punkten innerhalb des einfach zusammenhängenden Gebietes, wobei wir auf die explizite Angabe des Weges verzichten. Fasst man das Integral (2.1) für festes  $z_0 \in D$  als Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  in Abhängigkeit von  $z \in D$  auf, so ist  $F$  analytisch mit der Ableitung  $F' = f$ .

Da wir in [Abschnitt 2.4](#) lineare Differentialgleichungssysteme einer komplexen Veränderlichen betrachten, erinnern wir an dieser Stelle an den Identitätssatz analytische Funktionen, siehe zum Beispiel in [15]. Dieser spielt eine entscheidende Rolle beim Nachweis der Eindeutigkeit einer Lösungen von Anfangswertproblemen.

**Satz 2.1** *Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  analytische Funktion. Besitzt die Koïnzidenzmenge  $\{ z \in D \mid f(z) = g(z) \}$  einen Häufungspunkt in  $D$ , so sind  $f$  und  $g$  in  $D$  identisch. Insbesondere sind beide Funktionen identisch, wenn sie in einer nichtleeren, offenen Teilmenge von  $D$  übereinstimmen.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft analytischer Funktionen ist die Möglichkeit, dass diese unter bestimmten Voraussetzungen analytisch auf einen größeren Definitionsbereich fortgesetzt werden können. Eine hinreichende Bedingung unter der eine analytische Fortsetzung existiert liefert beispielsweise der Monodromiesatz, den wir aus [42, Chapter 16] zitieren.

**Satz 2.2** *Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $B_0 = B_r(z_0)$  eine offene Kugel in  $D$  mit Radius  $r > 0$  um den Punkt  $z_0 \in D$ . Weiterhin sei  $f_0 : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Für jeden Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ , der in  $\gamma(0) = z_0$  startet, existieren*

eine endliche Zerlegung  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und analytische Funktionen  $f_k : B_k \rightarrow \mathbb{C}$  mit offenen Kugeln  $B_k \subset D$  für  $k = 1, \dots, n$ , sodass

(i)  $\gamma([s_k, s_{k+1}]) \subset B_k$  für  $k = 0, \dots, n-1$ ,

(ii)  $B_k \cap B_{k+1}$  ist nichtleer und  $f_k(z) = f_{k+1}(z)$  für alle  $z \in B_k \cap B_{k+1}$  und  $k = 0, \dots, n-1$ .

Dann gibt es eine analytische Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ , welche innerhalb der Kugel  $B_0$  mit  $f_0$  übereinstimmt.

Ebenso benötigen wir die Aussage des nachfolgenden Satzes. Dieser ist Bestandteil des Weierstraßschen Konvergenzsatz, siehe zum Beispiel in [28].

**Satz 2.3** *Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $U$  analytischer Funktionen. Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere lokal gleichmäßig gegen  $f$ , das heißt für jedes  $z \in U$  existiere eine Umgebung von  $z$ , in welcher die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiere. Dann ist  $f$  in  $U$  analytisch.*

Wie bei stetig differenzierbare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen, reellen Vektorräumen gelten für analytische Funktionen ähnliche Aussagen bezüglich ihrer Invertierbarkeit. Wir zitieren die entsprechende Aussage aus [15, Kapitel I, Satz 5.7].

**Satz 2.4** *Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Für  $z_0 \in U$  gelte  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Kugel  $B_r(z_0) \subset D$  um  $z_0$  mit  $r > 0$ , sodass die Einschränkung  $f|_{B_r(z_0)}$  injektiv ist. Dabei ist das Bild  $f(B_r(z_0))$  offen und die Umkehrabbildung  $g := (f|_{B_r(z_0)})^{-1}$  eine analytische Funktion. Für die Ableitung von  $g$  gilt*

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in U.$$

Der Logarithmus spielt im Folgenden eine herausragende Rolle. Wir zitieren hier einige Aussagen aus [16, Chapter III, §2] und [15, Kapitel II, §2].

**Definition 2.5** Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Zweig des Logarithmus* falls für jedes  $z \in D$  die Gleichung  $e^{f(z)} = z$  erfüllt ist.

**Lemma 2.6** *Ein Zweig  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  des Logarithmus im Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  ist eine analytische Funktion. Des Weiteren gilt  $0 \notin D$ . Die Ableitung der Funktion  $f$  ist für  $z \in D$  gegeben durch  $f'(z) = \frac{1}{z}$ .*

**Definition 2.7** Es bezeichne  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  die *Argumentfunktion*, welche jeder komplexen Zahl  $z \neq 0$  ihren aus der Polarform  $z = |z|e^{i\varphi}$  resultierenden Winkel  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  zuordnet. Die Funktion  $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \ln(|z|) + i \arg(z)$  ist ein Zweig des Logarithmus. Dieser wird als *Hauptzweig des Logarithmus* bezeichnet.

## 2.1 Analytische Funktionen

Über Zweige des Logarithmus können analytische Potenzfunktion definieren werden. Es sei dazu  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  für ein Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  ein Zweig des Logarithmus. Für  $\alpha \in \mathbb{C}$  definieren wir eine Funktion  $g_\alpha : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^{\alpha f(z)}$ . Diese Funktion ist wegen der Analytizität der Funktion  $f$  und der komplexen Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  selbst analytisch in  $D$ . Für  $k \in \mathbb{Z}$  gilt insbesondere  $g_k(z) = (e^{f(z)})^k = z^k$ . Entsprechend bezeichnen wir für  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $z \in D$  mit  $z^\alpha$  die Funktion  $g_\alpha(z) = e^{\alpha f(z)}$ . Soweit nicht anders definiert sei dabei  $f$  stets der Hauptzweig des Logarithmus. Besonders hervorzuheben ist der Exponent  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Für einen Zweig des Logarithmus  $f$  erfüllt  $g_{\frac{1}{2}}$  für  $z \in D$  die Gleichung  $(g_{\frac{1}{2}}(z))^2 = (e^{\frac{1}{2}f(z)})^2 = z$ . Im Falle des Hauptzweiges des Logarithmus entspricht  $g_{\frac{1}{2}} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  gerade dem *Hauptzweig der Quadratwurzel*, wobei wir für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  wie üblich  $\sqrt{z}$  statt  $g_{\frac{1}{2}}(z) = e^{\frac{1}{2}\text{Ln}(z)}$  schreiben. Durch  $\sqrt{-z} := i\sqrt{z}$  für  $z \in (-\infty, 0]$  und  $\sqrt{0} := 0$  wird der Hauptzweig der Quadratwurzel auf die gesamte komplexe Zahlenebene fortgesetzt. Diese Fortsetzung ist jedoch auf der nichtpositiven Halbachse  $(-\infty, 0]$  nicht mehr stetig und damit insbesondere nicht analytisch in  $\mathbb{C}$ . Wir bezeichnen für  $z \in \mathbb{C}$  die so definierte Zahl  $\sqrt{z}$  als *Hauptwert der Quadratwurzel*.

Ein weiterer wichtiger Aspekt im Hinblick auf den Logarithmus ist für eine analytische Funktion  $f$  die Existenz einer weiteren analytischen Funktionen, welche  $e^h = f$  erfüllt.

**Lemma 2.8** *Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  und eine analytische Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ohne Nullstellen in  $D$  existiert eine analytische Funktion  $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ , welche  $f(z) = e^{h(z)}$  für alle  $z \in D$  erfüllt. Die Funktion  $h$  wird auch Zweig des Logarithmus von  $f$  genannt.*

**Beweis.** Für einen festen Punkt  $z_0 \in D$  sei

$$q(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(y)}{f(y)} dy, \quad z \in D.$$

Dabei ist der Integrand wegen der Nullstellenfreiheit der Funktion  $f$  analytisch, woraus als Konsequenzen des Cauchyschen Integralsatz das Integral vom Weg unabhängig (vergleiche [Abschnitt 2.1](#)) ist. Somit ist  $q : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion, deren Ableitung im Punkt  $z \in D$  gleich  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  ist. Wir betrachten die ebenfalls analytische Funktion

$$g : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^{q(z)}}{f(z)}.$$

Anhand der Ableitung der Funktion  $g$

$$g'(z) = \frac{e^{q(z)} q'(z)}{f(z)} - \frac{e^{q(z)} f'(z)}{(f(z))^2} = 0, \quad z \in D$$

sieht man, dass  $g$  in  $D$  konstant ist, wobei  $g(z) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  für alle  $z \in D$  gilt. Die Surjektivität der komplexen Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  liefert ein  $\omega \in \mathbb{C}$  mit

$e^\omega = c$ . Für die analytische Funktion  $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto q(z) - \omega$  erhält man

$$e^{h(z)} = e^{-\omega} g(z) f(z) = f(z), \quad z \in D. \quad \square$$

Als Folgerung kann man für eine nullstellenfreie, analytische Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  mittels eines Zweiges  $h$  des Logarithmus von  $f$  analytische Potenzfunktionen von  $f$  definieren. Für  $\alpha \in \mathbb{C}$  stellt  $p_\alpha : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^{\alpha h(z)}$  offenbar eine analytische Funktion dar. Speziell für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $(p_{\frac{1}{n}}(z))^n = f(z)$ , womit  $p_{\frac{1}{n}}$  in  $D$  einen analytischen Zweig der  $n$ -ten Wurzel der Funktion  $f$  darstellt.

## 2.2 Differentialgleichungssysteme einer reellen Veränderlichen

Für ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dy}{dx}(x) = A(x)y(x) + b(x), \quad x \in I \quad (2.2)$$

mit lokal integrierbaren Funktionen  $A : I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Für dieses Differentialgleichungssystem heißt eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  *Lösung* in  $I$ , wenn jede Komponente absolut stetig auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  ist und  $y$  die Gleichung (2.2) fast überall in  $I$  erfüllt. Wir zitieren nachfolgend bekannte Aussagen aus der Theorie linearer Differentialgleichungssysteme einer reellen Veränderlichen (siehe zum Beispiel [51]).

**Satz 2.9** *Zu  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  existiert genau eine Lösung des Differentialgleichungssystems (2.2) in  $I$  mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  für  $x_0 \in I$ .*

**Satz 2.10** *Der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems*

$$\frac{dy}{dx}(x) = A(x)y(x), \quad x \in I \quad (2.3)$$

*ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Es sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  eine Basis dieses Lösungsraumes. Für*

$$\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$$

*und  $x_0 \in I$  stellt*

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad x \mapsto \psi(x) := \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt$$

*eine Lösung des inhomogenen Systems (2.2) dar. Jede Lösung  $y$  des Differentialgleichungssystems (2.2) mit  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$  lässt sich darstellen als*

$$y(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0 + \psi(x) \quad \text{für } x \in I.$$



### 2.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung einer reellen Veränderlichen

Wir betrachten für ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  die lineare Differentialgleichung der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \frac{d^k f}{dx^k}(x) + g(x), \quad x \in I. \quad (2.4)$$

Dabei seien die Funktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbare Funktionen. Wir nennen eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  Lösung der Differentialgleichung (2.4), wenn die Funktion  $f$  sowie ihre ersten  $n - 1$  Ableitungen absolut stetig auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  sind und  $f$  die Gleichung (2.9) fast überall in  $I$  erfüllt.

Die Differentialgleichung (2.4) kann man in das äquivalente Differentialgleichungssystem (2.2) mit

$$y = \begin{pmatrix} f \\ \frac{df}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

umformen. Als Folgerung der Sätze 2.9 und 2.10 erhalten wir die nachfolgende Aussage.

**Satz 2.11** *Zu jedem  $x_0 \in I$  und allen Vektoren  $(c_0, \dots, c_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$  existiert genau eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (2.4) in  $I$ , welche die Anfangsbedingung  $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = c_k$  für  $k = 0, \dots, n - 1$  erfüllt. Der Lösungsraum der homogenen Gleichung, das heißt für  $g \equiv 0$ , ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.*

### 2.4 Differentialgleichungssysteme einer komplexen Veränderlichen

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{dy}{dz}(z) = A(z)y(z) + b(z) \quad (2.5)$$

für  $z$  in einem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$ . Dabei seien  $A : D \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $b : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  komponentenweise analytische Funktionen für  $n \in \mathbb{N}$ . Gesucht ist eine komponentenweise analytische Funktion  $y : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ , welche die Gleichung (2.5) punktweise in  $D$  erfüllt. Ein solches  $y$  nennen wir *Lösung* der Differentialgleichung (2.5) in  $D$ .

Eine natürliche Fragestellung ist, ob analog zum reellen Fall für jede Anfangsbedingung  $y(z_0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$  mit  $z_0 \in D$  eine eindeutige Lösung  $y$  der Gleichung (2.5) existiert. Man kann mit ähnlichen Methoden wie im Beweis des *Satzes von Picard-Lindelöf* zeigen, dass jeweils in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $z_0$  eine eindeutige Lösung existiert. Im folgenden

bezeichnen  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Vektornorm und  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  ihre induzierte Matrixnorm.

**Lemma 2.12** *Es seien  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $B_r(z_0)$  eine offene Kugel mit Radius  $r > 0$  um  $z_0$ . Weiterhin betrachten wir komponentenweise analytische, beschränkte Funktionen  $A : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $b : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^n$  wobei die Ungleichung*

$$M := \sup_{z \in B_r(z_0)} \|A(z)\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \frac{1}{r}$$

gelte. Dann existiert für  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  in  $B_r(z_0)$  eine eindeutige Lösung  $y$  des Differentialgleichungssystems (2.5) mit  $y(z_0) = y_0$ .

**Beweis.** 1. Für  $0 < s \leq r$  sei  $\mathcal{B}_s$  der Raum aller Funktionen mit Werten in  $\mathbb{C}^n$ , welche komponentenweise in  $B_s(z_0)$  analytisch und beschränkt sind. Für  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathcal{B}_s$  mit  $y_k : B_s(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sei eine Norm  $\|\cdot\|_s : \mathcal{B}_s \rightarrow \mathbb{R}$  mittels

$$\|y\|_s := \sup_{z \in B_r(z_0)} \|y(z)\|_{\mathbb{C}^n}$$

erklärt. Dann ist nach Satz 2.3  $(\mathcal{B}_s, \|\cdot\|_s)$  ein Banachraum. Wir betrachten den Integraloperator

$$T_s : \mathcal{B}_s \rightarrow \mathcal{B}_s, \quad (T_s y)(z) := y_0 + \int_{z_0}^z A(\zeta)y(\zeta) + b(\zeta) d\zeta, \quad y \in \mathcal{B}_s, \quad z \in B_s(z_0). \quad (2.6)$$

Da der Integrand komponentenweise analytisch und die offene Kugel  $B_s(z_0)$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet sind, hängt das Integral nach dem *Cauchyschen Integralsatz* nicht von der Wahl des Weges ab. Somit ist  $T_s$  wohldefiniert und bildet tatsächlich nach  $\mathcal{B}_s$  ab. Weiterhin ist  $T_s$  eine Kontraktion, da für  $y, \tilde{y} \in \mathcal{B}_s$

$$\|T_s y - T_s \tilde{y}\|_s \leq \sup_{z \in B_s(z_0)} \int_{z_0}^z \|A(\zeta)\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} \cdot \|y(\zeta) - \tilde{y}(\zeta)\|_{\mathbb{C}^n} |d\zeta| < sM \|y - \tilde{y}\|_s$$

folgt, wobei  $sM \leq rM < 1$  gilt. Für den Radius  $r$  liefert der *Banachsche Fixpunktsatz* einen eindeutigen Fixpunkt  $\hat{y} \in \mathcal{B}_r$  mit  $T_r \hat{y} = \hat{y}$ . Man sieht durch Differentiation, dass der Fixpunkt  $\hat{y}$  eine Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $B_r(z_0)$  ist und außerdem  $\hat{y}(z_0) = y_0$  erfüllt.

2. Es sei  $\tilde{y}$  eine Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $B_r(z_0)$  mit  $\tilde{y}(z_0) = y_0$ . Vorerst ist nicht klar, ob  $\tilde{y}$  beschränkt ist und in  $\mathcal{B}_r$  liegt. Schränkt man die komponentenweise analytische Funktion  $\tilde{y}$  auf eine kleinere Kugel  $B_s(z_0) \subset B_r(z_0)$  mit  $0 < s < r$  ein, so ist diese offenbar beschränkt und erfüllt die Fixpunktgleichung  $T_s \tilde{y}|_{B_s(z_0)} = \tilde{y}|_{B_s(z_0)}$ . Außerdem ist auch  $\hat{y}|_{B_s(z_0)}$  ein Fixpunkt von  $T_s$ . Da dieser nach dem Banachschen Fixpunktsatz eindeutig ist, stimmen  $\tilde{y}$  und  $\hat{y}$  innerhalb der offenen Kugel  $B_s(z_0)$  überein. Somit sind die komponentenweise analytischen Funktionen  $\tilde{y}$  und  $\hat{y}$  nach Satz 2.1 identisch.  $\square$

## 2.4 Differentialgleichungssysteme einer komplexen Veränderlichen

Die Schwierigkeit besteht nun darin, einen maximalen Definitionsbereich der Lösung zu finden. Dabei reicht es im Allgemeinen nicht aus, das Differentialgleichungssystem (2.5) auf einem Gebiet zu betrachten. Beispielsweise besitzt das Anfangswertproblem

$$\frac{dy}{dz}(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{mit } y(1) = 0$$

keine Lösung im Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Stattdessen stellen neben dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus  $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  auch andere Zweige des Logarithmus in der geschlitzten komplexen Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\varphi} \mid r \geq 0\}$  für  $\varphi \in (0, 2\pi)$  Lösungen des Anfangswertproblems dar.

Im Folgenden zeigen wir, dass es für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösung des Anfangswertproblems hinreichend ist, das Differentialgleichungssystem (2.5) in einem einfach zusammenhängenden Gebiet zu betrachten.

**Satz 2.13** *Es sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Weiterhin seien  $A : D \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $b : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  komponentenweise analytischen Funktionen. Dann existiert zu  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  und  $z_0 \in D$  eine eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $D$  mit der Anfangsbedingung  $y(z_0) = y_0$ .*

**Beweis.** Der Nachweis erfolgt in vier Schritten. Im ersten Schritt zeigen wir mit Hilfe von [Lemma 2.12](#) die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems und schlussfolgern daraus, dass höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems in  $D$  existieren kann. In den weiteren Schritten zeigen wir, dass die Voraussetzungen des [Satzes 2.2](#) erfüllt sind und wir die eindeutige, lokale Lösung analytisch auf  $D$  fortsetzen können. Im letzten Schritt weisen wir nach, dass diese Fortsetzung eine Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $D$  ist.

1. Da  $A$  und  $b$  in  $D$  komponentenweise analytische Funktionen sind, existiert eine offene Kugel  $B_r(z_0)$  um  $z_0$  mit hinreichend kleinem Radius  $r > 0$ , sodass die Voraussetzungen von [Lemma 2.12](#) erfüllt sind und eine eindeutige Lösung  $\tilde{y}$  des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $B_r(z_0)$  mit  $\tilde{y}(z_0) = y_0$  existiert. Jede Lösung  $y$  des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $D$  mit  $y(z_0) = y_0$  stimmt in  $B_r(z_0)$  mit  $\tilde{y}$  wegen der Eindeutigkeit überein. Dadurch erhalten wir mit [Satz 2.1](#) im Falle der Existenz einer Lösung  $y$  des Differentialgleichungssystems (2.5) in  $D$  mit  $y(z_0) = y_0$ , dass diese eindeutig bestimmt ist.

2. Wir betrachten einen beliebigen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  mit  $\gamma(0) = z_0$ . Da das Bild von  $\gamma$  eine kompakte Menge ist, ist der Abstand  $d$  zwischen dem Bild des Weges  $\gamma$  und dem Rand von  $D$  positiv beziehungsweise unendlich. Es existiert somit ein  $\varepsilon > 0$ , sodass die Minkowski-Summe des Abschlusses der Kugel  $B_\varepsilon(0)$  und dem Bild von  $\gamma$  in  $D$  enthalten ist,

$$K := \overline{B_\varepsilon(0)} + \text{ran}(\gamma) = \left\{ z + y \in \mathbb{C} \mid z \in \text{ran}(\gamma), \quad y \in \overline{B_\varepsilon(0)} \right\} \subset D.$$

$K$  ist offenbar kompakt, wodurch die Funktionen  $A|_K$  und  $b|_K$  beschränkt sind. Wir wählen

einen Radius  $s$  mit

$$0 < s \leq \min\{\varepsilon, r\} \quad \text{und} \quad \sup_{z \in K} \|A(z)\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \frac{1}{s}.$$

Wegen der Kompaktheit des Bildes von  $\gamma$  finden wir eine endliche Überdeckung der Menge  $\text{ran}(\gamma)$  mit offenen Kugeln  $B_s(\gamma(t_k)) \subset D$  und Stützstellen  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ , sodass jeweils  $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| < \frac{s}{2}$  für  $k = 0, \dots, m-1$  gilt. Entsprechend der Konstruktion gelten  $\overline{B_s(\gamma(t_k))} \subset K$  und

$$\sup_{z \in \overline{B_s(\gamma(t_k))}} \|A(z)\|_{\mathbb{C}^{n \times n}} < \frac{1}{s}$$

für alle  $k \in \{0, \dots, m\}$ . Nach [Lemma 2.12](#) besitzt das Anfangswertproblem

$$\frac{dw_k}{dz} = A(z)w_k(z) + b(z), \quad z \in B_s(\gamma(t_k)), \quad w_k(\gamma(t_k)) = \begin{cases} y_0, & \text{für } k = 0 \\ w_{k-1}(\gamma(t_k)), & \text{für } k = 1, \dots, m \end{cases}$$

induktiv für jedes  $k = 0, \dots, m$  eine eindeutige Lösung in  $B_s(\gamma(t_k))$ , wobei wir diese mit  $w_k$  bezeichnen. Insbesondere stimmen  $w_0$  und  $\tilde{y}|_{B_s(z_0)}$  überein.

3. Für  $k = 0, \dots, m-1$  stimmen nach Konstruktion die Funktionen  $w_k$  und  $w_{k+1}$  im Punkt  $\gamma(t_k)$  überein. Nach [Lemma 2.12](#) stimmen diese außerdem in einer offenen Kugel um den Punkt  $\gamma(t_k)$  innerhalb des nichtleeren Gebietes  $B_s(\gamma(t_k)) \cap B_s(\gamma(t_{k+1}))$  überein. Mit [Satz 2.1](#) folgt die Identität von  $w_k$  und  $w_{k+1}$  in  $B_s(\gamma(t_k)) \cap B_s(\gamma(t_{k+1}))$ .

4. Somit sind alle Voraussetzungen des [Satzes 2.2](#) erfüllt. Es existiert somit eine komponentenweise analytische Abbildung  $y : D \rightarrow \mathbb{C}$ , die innerhalb der offenen Kugel  $B_r(z_0)$  mit  $\tilde{y}$  übereinstimmt. Es fehlt der Nachweis, dass  $y$  das Differentialgleichungssystem (2.5) löst. Da  $\tilde{y} = y|_{B_r(z_0)}$  in  $B_r(z_0)$  Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) ist, stimmen die im Gebiet  $D$  komponentenweise analytischen Funktionen  $\frac{dy}{dz}$  und  $(Ay + b)$  nach [Satz 2.1](#) überein, das heißt  $y$  löst das Differentialgleichungssystem (2.5) in  $D$ .  $\square$

**Satz 2.14** *Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems*

$$\frac{dy}{dz}(z) = A(z)y(z), \quad z \in D \tag{2.7}$$

ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Es sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  eine Basis dieses Lösungsraumes. Für

$$\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$$

## 2.5 Differentialgleichungen höherer Ordnung einer komplexen Veränderlichen

und  $z_0 \in D$  stellt

$$\psi : D \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \mapsto \psi(z) := \Phi(z) \int_{z_0}^z \Phi(\zeta)^{-1} b(\zeta) d\zeta \quad (2.8)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems (2.5) dar. Jede Lösung  $y$  des Differentialgleichungssystems (2.5) mit  $y(z_0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$  lässt sich darstellen als

$$y(z) = \Phi(z)\Phi(z_0)^{-1}y_0 + \psi(z) \quad \text{für } z \in D.$$

**Beweis.** Wie im reellen Fall kann man die Frage nach der Anzahl linear unabhängiger Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems (2.7) wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems auf die Mächtigkeit einer Basis des Vektorraumes  $\mathbb{C}^n$  zurückführen. Somit ist klar, dass der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems die Dimension  $n$  besitzt. Es sei nun  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems. Auf Grund der Eindeutigkeit verschwindet jede nichttriviale Linearkombination dieser Basisvektoren nirgends in  $D$ . Die Spalten der Matrix  $\Phi(z)$  sind somit für jedes  $z \in D$  linear unabhängig, weshalb die Inverse  $\Phi(z)^{-1}$  für jedes  $z \in D$  existiert. Ferner besitzt die Abbildung  $z \mapsto \det(\Phi(z))$  in  $D$  keine Nullstellen und ist nach der *Leibnitz-Formel* für Determinanten analytisch in  $D$ . Stellt man die Inverse  $\Phi(z)^{-1}$  als Quotient der Adjunkten der Matrix  $\Phi(z)$  und der Determinanten  $\det(\Phi(z))$  dar, so sieht man, dass die Einträge von  $\Phi(z)^{-1}$  analytisch von  $z$  abhängen. Die Funktion  $\psi$  in (2.8) ist wegen der Wegunabhängigkeit des Integrals im einfach zusammenhängenden Gebiet  $D$  wohldefiniert, analytisch und erfüllt offenbar  $\psi(z_0) = 0$ . Durch Differentiation unter Anwendung der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d\psi}{dz}(z) = A(z)\Phi(z) \int_{z_0}^z \Phi(\zeta)^{-1} b(\zeta) d\zeta + b(z) = A(z)\psi(z) + b(z), \quad z \in D.$$

Betrachten wir nun eine Lösung  $y$  der Differentialgleichung (2.5) mit einem Anfangswert  $y(z_0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$ . Offenbar erfüllt  $\tilde{y} : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $\tilde{y}(z) = \Phi(z)\Phi(z_0)^{-1}y_0 + \psi(z)$  für  $z \in D$  ebenfalls das gegebene Anfangswertproblem in  $D$ . Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt  $y = \tilde{y}$ .  $\square$

## 2.5 Differentialgleichungen höherer Ordnung einer komplexen Veränderlichen

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \frac{d^k f}{z^k}(z) + g(z) \quad (2.9)$$

für  $z$  in einem einfach zusammenhängendem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$ . Dabei seien die Funktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Wir nennen eine analytische Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , welche

die Gleichung (2.9) punktweise in  $D$  erfüllt, *Lösung* der Differentialgleichung (2.9) in  $D$ .

Die Differentialgleichung (2.9) kann in das äquivalente Differentialgleichungssystem (2.5) mit

$$y = \begin{pmatrix} f \\ \frac{df}{dz} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

umgeformt werden. In Analogie zum reellen Fall erhalten wir als Folgerung der Sätze 2.13 und 2.14 die nachfolgende Aussage.

**Satz 2.15** *Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  existiert zu jedem  $z_0 \in D$  und allen Vektoren  $(c_0, \dots, c_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$  genau eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (2.9) in  $D$ , welche die Anfangsbedingung  $\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = c_k$  für  $k = 0, \dots, n-1$ , erfüllt. Der Lösungsraum der homogenen Gleichung, das heißt für  $g \equiv 0$ , ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.*

## 3 Die WKB-Näherung

### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

Wir betrachten für ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und stetige komplexwertige Funktionen  $p, q : I \rightarrow \mathbb{C}$  die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = (p(x) + q(x))f(x), \quad x \in I. \quad (3.1)$$

Sind  $q \equiv 0$  und  $p$  konstant mit  $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so erhält man bekanntermaßen zwei linear unabhängige Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  mit  $f_{1,2}(x) = e^{\pm x\sqrt{p}}$  für  $x \in I$ . Dabei sei in diesem Abschnitt für eine komplexe Zahl  $z \neq 0$  die Quadratwurzel über den Hauptwert der komplexen Quadratwurzel

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i \arg(z)}{2}}$$

mit der Argumentfunktion  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  erklärt (vergleiche [Abschnitt 2.1](#)). Analog kann man für einen nicht konstanten Koeffizienten  $p$  Lösungen mittels  $e^{\pm x\sqrt{p(x)}}$  approximieren, sofern  $p$  keine Nullstellen in  $I$  besitzt. Diese Näherung ist jedoch für eine schnell variierende Koeffizientenfunktion unzureichend und spiegelt im Allgemeinen nicht das asymptotische Verhalten der tatsächlichen Lösungen wider. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

**Beispiel 3.1** Wir schauen auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = (4x^2 + 2)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit den beiden linear unabhängigen Lösungen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{x^2} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Dabei genügen diese den Anfangsbedingungen  $f(0) = 1$  und  $f'(0) = 0$  sowie  $g(0) = 0$  und  $g'(0) = 1$ . Wendet man die obige Approximation an, so erhält man zwei Funktionen  $\hat{f}_1$  und  $\hat{f}_2$  mit  $\hat{f}_{1,2}(x) = e^{\pm x\sqrt{4x^2+2}}$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Wir wollen  $f$  durch eine Linearkombination  $\hat{f} = \alpha\hat{f}_1 + \beta\hat{f}_2$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  approximieren. Da  $f, \hat{f}_1$  und  $\hat{f}_2$  reellwertige Funktionen sind, können wir uns dabei auf reelle Koeffizienten beschränken. Man beachte außerdem, dass  $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(-x)$  für  $x \rightarrow \infty$  unbeschränkt wächst und für  $x \rightarrow -\infty$  verschwindet, während  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  gegen  $\infty$  strebt. Somit können wir die Wahl der Koeffizienten weiter auf

positive Konstanten  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$  einschränken. Die resultierende Linearkombination genügt für alle  $x \in \mathbb{R}$  den Abschätzungen  $\hat{f}(x) \leq (|\alpha| + |\beta|)e^{|x|\sqrt{4x^2+2}} \leq (|\alpha| + |\beta|)e^{2x^2+\sqrt{2}|x|}$  und  $\hat{f}(x) \geq \min\{|\alpha|, |\beta|\}e^{|x|\sqrt{4x^2+2}} \geq \min\{|\alpha|, |\beta|\}e^{2x^2}$ . Somit erhalten wir

$$\min\{|\alpha|, |\beta|\}e^{x^2} \leq \frac{\hat{f}(x)}{f(x)} \leq (|\alpha| + |\beta|)e^{x^2+\sqrt{2}|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Man sieht dabei, dass  $\hat{f}(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  wesentlich schneller als  $f(x)$  wächst. In Hinblick auf das Wachstum für  $x \rightarrow \pm\infty$  eignet sich folglich keine Linearkombination der Funktionen  $\hat{f}_1$  und  $\hat{f}_2$  zur Approximation  $f$ .

Eine bessere Näherung für das allgemeine Problem (3.1) erhalten wir mit dem folgenden Ansatz. Dafür fordern wir, dass für die Funktion  $p$  eine Zerlegung

$$p = \mu \cdot r$$

mit einer zweimal stetig differenzierbare, positiven Funktion  $r : I \rightarrow (0, \infty)$  und einer Konstanten  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert. Wir unterwerfen die Differentialgleichung (3.1) der sogenannten *Liouville-Transformation* mittels

$$\nu : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} \, dy + c \tag{3.2}$$

für ein fest gewähltes  $x_0 \in I$  und festes  $c \in \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $\nu$  ist offenbar eine streng monoton wachsende sowie dreimal stetig differenzierbare Funktion und bildet somit  $I$  bijektiv auf ein offenes Intervall  $\text{ran}(\nu) \subset \mathbb{R}$  ab. Es sei mit  $\eta := \nu^{-1}$  die Umkehrabbildung bezeichnet. Dann gilt  $\frac{d\eta}{dt}(t) = (\nu'(\eta(t)))^{-1} = (r(\eta(t)))^{-\frac{1}{2}}$ . Wir definieren für eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (3.1) die Funktion  $F : \text{ran}(\nu) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$F(t) := (\nu'(\eta(t)))^{\frac{1}{2}} f(\eta(t)) = (r(\eta(t)))^{\frac{1}{4}} f(\eta(t)), \quad t \in \text{ran}(\nu). \tag{3.3}$$

Im Folgenden unterdrücken wir die Funktionsargumente  $t$  und  $\eta(t)$ . Durch Differentiation von  $F$  nach  $t$  erhält man

$$r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dF}{dt} = \frac{1}{4} r^{-\frac{3}{4}} r' f + r^{\frac{1}{4}} f'. \tag{3.4}$$

Mit nochmaliger Differentiation der Gleichung (3.4) nach  $t$  und anschließender Multiplikation mit  $r^{\frac{1}{2}}$  ergibt sich

$$\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} r' \frac{dF}{dt} + r \frac{d^2 F}{dt^2} = -\frac{3}{16} r^{-\frac{7}{4}} (r')^2 f + \frac{1}{4} r^{-\frac{3}{4}} r'' f + \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{4}} r' f' + r^{\frac{1}{4}} f''. \tag{3.5}$$

Durch Umstellen der Terme mit Hilfe der Beziehungen (3.3) und (3.4) sowie der Tatsache, dass



### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

$f$  die Differentialgleichung  $f'' = (p + q)f$  erfüllt, lässt sich (3.5) weiter äquivalent umformen,

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \left( \frac{r''}{4r^2} - \frac{5(r')^2}{16r^3} + \mu + \frac{q}{r} \right) F.$$

Die Funktion  $F$  ist somit Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(t) = (\mu + g(t))F(t), \quad t \in \text{ran}(\nu) \quad (3.6)$$

mit der stetigen Funktion  $g : \text{ran}(\nu) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$g(t) = \frac{4r''(\eta(t))r(\eta(t)) - 5(r'(\eta(t)))^2}{16(r(\eta(t)))^3} + \frac{q(\eta(t))}{r(\eta(t))}, \quad t \in \text{ran}(\nu). \quad (3.7)$$

Wir schreiben die Funktion  $F$  als das Produkt

$$F(t) = e^{t\theta\sqrt{\mu}}(1 + h(t)), \quad t \in \text{ran}(\nu). \quad (3.8)$$

mit  $\theta \in \{-1, 1\}$  und einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $h : \text{ran}(\nu) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$h(t) = F(t)e^{-t\theta\sqrt{\mu}} - 1, \quad t \in \text{ran}(\nu).$$

Die Berechnung der ersten beiden Ableitungen von  $F$  liefert

$$\frac{dF}{dt}(t) = \theta\sqrt{\mu}e^{t\theta\sqrt{\mu}}(1 + h(t)) + e^{t\theta\sqrt{\mu}} \cdot \frac{dh}{dt}(t), \quad t \in \text{ran}(\nu)$$

und mit (3.6) für  $t \in \text{ran}(\nu)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dt^2}(t) &= \theta^2 \mu e^{t\theta\sqrt{\mu}}(1 + h(t)) + 2\theta\sqrt{\mu}e^{t\theta\sqrt{\mu}} \cdot \frac{dh}{dt}(t) + e^{t\theta\sqrt{\mu}} \cdot \frac{d^2 h}{dt^2}(t) \\ &= (\mu + g(t))e^{t\theta\sqrt{\mu}}(1 + h(t)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Durch Umstellung der letzten Gleichung erhalten wir unter Ausnutzung von  $\theta^2 = 1$  für  $h$  die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 h}{dt^2}(t) + 2\theta\sqrt{\mu}\frac{dh}{dt}(t) = g(t)(1 + h(t)), \quad t \in \text{ran}(\nu). \quad (3.10)$$

**Lemma 3.2** *Es sei  $\theta \in \{-1, 1\}$ . Für jede Lösung  $h$  der Differentialgleichung (3.10) ist durch*

$$f(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu}\nu(x)}(1 + h(\nu(x))), \quad x \in I \quad (3.11)$$

*eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (3.1) gegeben.*

**Beweis.** Es sei  $\tilde{h}$  eine Lösung der Differentialgleichung (3.10). Wir betrachten für einen Punkt  $t_0 \in \text{ran}(\nu)$  mit  $x_0 := \eta(t_0)$  die Anfangswerte  $c_0 := \tilde{h}(t_0)$  und  $c_1 := \frac{d\tilde{h}}{dt}(t_0)$ . Nach Satz 2.11 existiert eine eindeutige Lösung  $f$  der Differentialgleichung (3.1) mit  $f(x_0) = (r(x_0))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu\nu}(x_0)}(1 + c_0)$  und

$$f'(x_0) = \left( \left( \theta\sqrt{\mu}(r(x_0))^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}(r(x_0))^{-\frac{5}{4}}r'(x_0) \right) (1 + c_0) + (r(x_0))^{\frac{1}{4}}c_1 \right) e^{\theta\sqrt{\mu\nu}(x_0)}. \quad (3.12)$$

Zusammen mit (3.3) und (3.8) erhalten wir für die resultierende Funktion  $h$  die Beziehung

$$f(\eta(t)) = (r(\eta(t)))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu}t} (1 + h(t)), \quad t \in \text{ran}(\nu), \quad (3.13)$$

wobei  $h$  wegen (3.9) eine Lösung der Differentialgleichung (3.10) ist. Man sieht leicht, dass  $h(t_0) = c_0 = \tilde{h}(t_0)$  gilt. Leiten wir in (3.13) beide Seiten nach  $t$  ab, so erhalten wir wegen  $\frac{d\eta}{dt}(t) = (r(\eta(t)))^{-\frac{1}{2}}$  für  $t \in \text{ran}(\nu)$

$$\begin{aligned} f'(\eta(t))(r(\eta(t)))^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{4}(r(\eta(t)))^{-\frac{5}{4}}r'(\eta(t))(r(\eta(t)))^{-\frac{1}{2}}e^{\theta\sqrt{\mu}t}(1 + h(t)) \\ &\quad + \theta\sqrt{\mu}(r(\eta(t)))^{-\frac{1}{4}}e^{\theta\sqrt{\mu}t}(1 + h(t)) \\ &\quad + (r(\eta(t)))^{-\frac{1}{4}}e^{\theta\sqrt{\mu}t}\frac{dh}{dt}(t). \end{aligned}$$

Setzt man  $t = t_0 = \nu(x_0)$  ein, so sieht man mit (3.12), dass  $\frac{dh}{dt}(t_0) = c_1 = \frac{d\tilde{h}}{dt}(t_0)$  gilt. Nach Satz 2.11 stimmen  $h$  und  $\tilde{h}$  in  $\text{ran}(\nu)$  überein. Substituiert man in (3.13) jeweils  $t$  mit  $\nu(x)$ , so erhält man (3.11).  $\square$

Der nachfolgende Satz liefert die Grundlage für die weitere Konstruktion von Lösungen der Differentialgleichung (3.10). Er beschreibt für eine spezielle Volterra-Integralgleichung eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer stetig differenzierbaren Lösung sowie Schranken dieser Lösung und ihrer Ableitung.

**Satz 3.3** *Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $t_0 := \inf(I)$ , wobei insbesondere  $t_0 = -\infty$  zugelassen ist. Außerdem sei  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit monoton wachsendem Realteil  $\text{Re}(\kappa)$ . Wir wählen für ein reellwertiges  $\kappa$  die Konstante  $\omega := 1$  und im komplexwertigen Fall  $\omega := 2$ . Des Weiteren sei  $G : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, welche für ein  $t_1 \in I$  mit  $t_0 < t_1$  über  $(t_0, t_1)$  integrierbar ist. Dann existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ , welche die Gleichung*

$$h(t) = \int_{t_0}^t \left( 1 - e^{-(\kappa(t) - \kappa(s))} \right) G(s)(1 + h(s)) ds, \quad t \in I. \quad (3.14)$$

erfüllt und durch

$$|h(t)| \leq e^{\omega \int_{t_0}^t |G(s)| ds} - 1, \quad t \in I \quad (3.15)$$

### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

beschränkt ist. Für die Ableitung von  $h$  gilt

$$\frac{dh}{dt}(t) = \int_{t_0}^t e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} \dot{\kappa}(t) G(s) (1 + h(s)) ds, \quad t \in I. \quad (3.16)$$

Ferner ist die Ableitung beschränkt durch

$$\left| \frac{dh}{dt}(t) \right| \leq \frac{|\dot{\kappa}(t)|}{\omega} \left( e^{\omega \int_{t_0}^t |G(s)| ds} - 1 \right), \quad t \in I. \quad (3.17)$$

Ist die Funktion  $\kappa$  sogar zweimal stetig differenzierbar mit nirgends in  $I$  verschwindender erster Ableitung, so ist auch  $h$  zweimal stetig differenzierbar und erfüllt im Inneren von  $I$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \left( \dot{\kappa} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}} \right) \frac{dh}{dt} = \dot{\kappa} G \cdot (1 + h).$$

**Beweis.** Die Monotonie des Realteils der Funktion  $\kappa$  liefert für alle  $t, s \in I$  mit  $t \geq s$

$$\left| e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} \right| = e^{-(\operatorname{Re}(\kappa(t))-\operatorname{Re}(\kappa(s)))} \leq 1 \quad \text{und} \quad \left| 1 - e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} \right| \leq 2.$$

Ist  $\kappa$  eine reellwertige Funktion, so gilt für  $t \geq s$  die bessere Abschätzung

$$\left| 1 - e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} \right| \leq 1.$$

In beiden Fällen gilt nach Wahl von  $\omega$

$$\left| 1 - e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} \right| \leq \omega. \quad (3.18)$$

Wir definieren induktiv eine Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von stetigen Funktionen in  $I$  durch die Vorschrift  $h_1(t) := 0$  für alle  $t \in I$  und

$$h_{k+1}(t) := \int_{t_0}^t \left( 1 - e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} \right) G(s) (1 + h_k(s)) ds, \quad t \in I, \quad k \geq 2. \quad (3.19)$$

Wir zeigen induktiv, dass die Integrale in (3.19) existieren. Dazu betrachten wir die Differenz zweier Folgenglieder. Nach den Voraussetzungen an  $G$  gilt

$$|h_2(t) - h_1(t)| \leq \omega \int_{t_0}^t |G(s)| ds = \omega \left( \int_{t_0}^{t_1} |G(s)| ds + \int_{t_1}^t |G(s)| ds \right) < \infty, \quad t \in I.$$

Durch vollständige Induktion folgt für  $k \geq 2$  und  $t \in I$

$$\begin{aligned} |h_{k+1}(t) - h_k(t)| &\leq \int_{t_0}^t \omega |G(s)| |h_k(s) - h_{k-1}(s)| \, ds \leq \int_{t_0}^t \frac{\omega |G(s)|}{(k-1)!} \left( \omega \int_{t_0}^s |G(\tau)| \, d\tau \right)^{k-1} \, ds \\ &= \frac{1}{k!} \left( \omega \int_{t_0}^t |G(s)| \, ds \right)^k. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges abgeschlossene Teilintervall  $[s_1, s_2] \subset I$  und  $n \geq m \geq 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s_1, s_2]} |h_n(t) - h_m(t)| &= \sup_{t \in [s_1, s_2]} \left| \sum_{k=m+1}^n h_k(t) - h_{k-1}(t) \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{(k-1)!} \left( \omega \int_{t_0}^{s_2} |G(s)| \, ds \right)^{k-1} \leq e^{\omega \int_{t_0}^{s_2} |G(s)|} - 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Somit bildet die Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge im Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf  $[s_1, s_2]$  ausgestattet mit der Supremumsnorm. Folglich konvergiert die Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von  $I$  gleichmäßig, insbesondere auch punktweise. Wir bezeichnen für  $t \in I$  den punktweisen Grenzwert

$$h(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t),$$

wobei die Funktion  $h : I \rightarrow \mathbb{C}$  auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz stetig ist. Die Schranke (3.15) für  $h$  ergibt sich aus (3.20) und der Definition von  $h$ . Wir zeigen mit Hilfe des *Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz*, dass die Funktion  $h$  die Integralgleichung (3.14) erfüllt. Dazu betrachten wir

$$h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n+1}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left( 1 - e^{-(\kappa(t) - \kappa(s))} \right) G(s) (1 + h_n(s)) \, ds.$$

Dabei ist der Integrand für alle  $n \in \mathbb{N}$  und festes  $t \in I$  sowie  $s \in (t_0, t]$  nach (3.20) und (3.18) jeweils durch

$$\left| \left( 1 - e^{-(\kappa(t) - \kappa(s))} \right) G(s) (1 + h_n(s)) \right| \leq \omega |G(s)| e^{\omega \int_{t_0}^s |G(\tau)| \, d\tau}$$

beschränkt, wobei die Majorante wegen

$$\int_{t_0}^t \omega |G(s)| e^{\omega \int_{t_0}^s |G(\tau)| \, d\tau} \, ds = e^{\omega \int_{t_0}^t |G(\tau)| \, d\tau} - 1$$

integrierbar ist.

Da die Funktionen  $h$ ,  $G$  stetig und  $\kappa$  stetig differenzierbar sind folgt aus (3.14) die stetige Differenzierbarkeit der Funktion  $h$ . Durch einmaliges Ableiten beider Seiten in (3.14) mit Hilfe der Ketten- sowie Produktregel erhalten wir die Gleichung (3.16). Zusammen mit der

### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

Ungleichung (3.15) sieht man, dass (3.17) gilt,

$$\begin{aligned} \left| \frac{dh}{dt}(t) \right| &\leq |\dot{\kappa}(t)| \int_{t_0}^t |G(s)|(1 + |h(s)|) ds \leq |\dot{\kappa}(t)| \int_{t_0}^t |G(s)| e^{\omega \int_{t_0}^s |G(\tau)| d\tau} ds \\ &= \frac{|\dot{\kappa}(t)|}{\omega} \left( e^{\omega \int_{t_0}^t |G(s)| ds} - 1 \right) \end{aligned}$$

Ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\kappa$  gegeben, so erhält man aus (3.16) durch nochmaliges Ableiten unter Anwendung der Produktregel für  $t \in I$

$$\begin{aligned} \frac{d^2h}{dt^2}(t) &= \left( \ddot{\kappa}(t) - (\dot{\kappa}(t))^2 \right) \int_{t_0}^t e^{-(\kappa(t)-\kappa(s))} G(s)(1 + h(s)) ds + \dot{\kappa}(t)G(t)(1 + h(t)) \\ &= - \left( \dot{\kappa}(t) - \frac{\ddot{\kappa}(t)}{\dot{\kappa}(t)} \right) \frac{dh}{dt}(t) + \dot{\kappa}(t)G(t)(1 + h(t)). \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden konstruieren wir mit Hilfe des letzten Satzes Lösungen der Differentialgleichung (3.1). Dabei nutzen wir die Ungleichungen (3.15) und (3.17) für den Nachweis oberer Schranken. Den nachstehenden Satz findet man in ähnlicher Form in [39]. Im Gegensatz zu [39, Chapter 6, Theorem 2.1] lassen wir in der Differentialgleichung (3.1) nicht nur positive, zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $p$  zu.

**Satz 3.4** *Wir betrachten im offenen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  und eine stetige Funktion  $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  die Differentialgleichung*

$$\frac{df}{dx^2}(x) = (p(x) + q(x))f(x), \quad x \in (a, b). \quad (3.21)$$

*Es existiere eine Faktorisierung von  $p$  der Form*

$$p = \mu \cdot r$$

*mit einer komplexen Zahl  $\mu \neq 0$  und einer zweimal stetig differenzierbaren, positiven Funktion  $r : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ . Außerdem seien  $x_0 \in (a, b)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  sowie  $\theta \in \{-1, 1\}$ . Wir wählen im Fall  $\text{Im}(\theta\sqrt{\mu}) = 0$  die Konstante  $\omega := 1$  und  $\omega := 2$  im Fall  $\text{Im}(\theta\sqrt{\mu}) \neq 0$ .*

*1. Sind  $\text{Re}(\theta\sqrt{\mu}) > 0$  und die Funktion  $\mathcal{E} : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\omega}{2\sqrt{\mu}} \left( \frac{4r''(x)r(x) - 5(r'(x))^2}{16(r(x))^{\frac{5}{2}}} + \frac{q(x)}{(r(x))^{\frac{1}{2}}} \right), \quad x \in (a, b) \quad (3.22)$$

*für ein  $x_1 \in (a, b)$  über  $(a, x_1)$  integrierbar, so existiert eine Lösung  $f_1$  der Differentialgleichung (3.21) in der Form*

$$f_1(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu} \left( \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c \right)} (1 + R_1(x)), \quad x \in (a, b), \quad (3.23)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $R_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ . Ferner gelten für  $R_1$  die Abschätzungen

$$|R_1(x)| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b)$$

und

$$\left| \frac{\omega}{2} (p(x))^{-\frac{1}{2}} R_1'(x) \right| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b).$$

Sind  $p$  und  $q$  reellwertig, so ist es auch  $f_1$ .

2. Sind  $\operatorname{Re}(\theta\sqrt{\mu}) < 0$  und die Funktion  $\mathcal{E}$  wie in (3.22) für ein  $x_1 \in (a, b)$  über  $(x_1, b)$  integrierbar, so existiert eine Lösung  $f_2$  der Differentialgleichung (3.1) in der Form

$$f_2(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu} \left( \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c \right)} (1 + R_2(x)), \quad x \in (a, b), \quad (3.24)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $R_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ . Ferner gelten für  $R_2$  die Abschätzungen

$$|R_2(x)| \leq e^{\int_x^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b)$$

und

$$\left| \frac{\omega}{2} (p(x))^{-\frac{1}{2}} R_2'(x) \right| \leq e^{\int_x^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b).$$

Sind die Funktionen  $p$  und  $q$  reellwertig, so ist es auch  $f_2$ .

**Beweis.** Es seien  $\nu : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  wie in (3.2) und  $\eta = \nu^{-1}$  die inverse Abbildung. Des Weiteren sei das offene Intervall  $\operatorname{ran}(\nu)$  mit  $(\alpha, \beta)$  bezeichnet.

1. Wir betrachten den Fall  $\operatorname{Re}(\theta\sqrt{\mu}) > 0$ . Aus der Integrierbarkeit der Funktion  $\mathcal{E}$  über  $(a, x_1)$  erhalten wir nach (3.7) durch

$$\begin{aligned} \int_a^{x_1} \mathcal{E}(y) dy &= \int_\alpha^{\nu(x_1)} \mathcal{E}(\eta(s)) \dot{\eta}(s) ds = \int_\alpha^{\nu(x_1)} \mathcal{E}(\eta(s)) (r(\eta(s)))^{-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{\omega}{2\sqrt{\mu}} \int_\alpha^{\nu(x_1)} \frac{4r''(\eta(s))r(\eta(s)) - 5(r'(\eta(s)))^2}{16(r(\eta(s)))^3} + \frac{q(\eta(s))}{r(\eta(s))} ds \\ &= \frac{\omega}{2\sqrt{\mu}} \int_\alpha^{\nu(x_1)} g(s) ds \end{aligned} \quad (3.25)$$

die Integrierbarkeit der Funktion  $G : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G := \frac{1}{2\theta\sqrt{\mu}}g$  über dem Intervall  $(\alpha, \nu(x_1))$ . Weiterhin ist der Realteil von  $\kappa : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto 2\theta\sqrt{\mu}t$  eine monoton wachsende Funktion. Die Voraussetzungen aus Satz 3.3 sind erfüllt und wir erhalten eine zweimal stetig differenzierbare

### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

Funktion  $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ , für welche die Integralgleichung

$$h(t) = \frac{1}{2\theta\sqrt{\mu}} \int_{\alpha}^t (1 - e^{-2\theta\sqrt{\mu}(t-s)})g(s)(1 + h(s)) ds, \quad t \in (\alpha, \beta) \quad (3.26)$$

und wegen  $|\theta| = 1$  die Abschätzungen

$$|h(t)| \leq e^{\frac{\omega}{2|\sqrt{\mu}|} \int_{\alpha}^t |g(s)| ds} - 1, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (3.27)$$

sowie

$$\left| \frac{dh}{dt}(t) \right| \leq \frac{|2\sqrt{\mu}|}{\omega} \left( e^{\frac{\omega}{2|\sqrt{\mu}|} \int_{\alpha}^t |g(s)| ds} - 1 \right), \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (3.28)$$

erfüllt sind. Des Weiteren erfüllt  $h$  nach [Satz 3.3](#) die Differentialgleichung [\(3.10\)](#). Durch die Rücktransformation [\(3.11\)](#) erhalten wir eine Lösung  $f_1$  der Differentialgleichung [\(3.21\)](#) in der Darstellung [\(3.23\)](#) mit  $R_1 := h \circ \nu$ ,

$$f_1(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu}\nu(x)}(1 + R_1(x)), \quad x \in (a, b).$$

Analog zu [\(3.25\)](#) gilt für  $t = \nu(x) \in (\alpha, \beta)$

$$\frac{\omega}{2|\sqrt{\mu}|} \int_{\alpha}^t |g(s)| ds = \int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy.$$

Zusammenfassend sehen wir mit [\(3.27\)](#) und [\(3.28\)](#), dass  $R_1$  die Ungleichungen

$$|R_1(x)| = |h(\nu(x))| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy} - 1$$

und

$$|R_1'(x)| = \left| \frac{dh}{dt}(\nu(x)) \cdot \frac{d\nu}{dx}(x) \right| \leq \frac{2|\sqrt{\mu}|\sqrt{r(x)}}{\omega} \left( e^{\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy} - 1 \right)$$

erfüllt.

2. Der Fall  $\operatorname{Re}(\theta\sqrt{\mu}) < 0$  liefert in ähnlicher Weise die gesuchte Lösung  $f_2$ . Wir betrachten die Integralgleichung

$$h(t) = -\frac{1}{2\theta\sqrt{\mu}} \int_t^{\beta} (1 - e^{-2\theta\sqrt{\mu}(t-s)})g(s)(1 + h(s)) ds, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

Mit der Substitution  $\sigma = -s$ ,  $\tau = -t$  und  $\hat{h}(\tau) = h(-\tau)$  erhalten wir daraus die Integralgleichung in der Form

$$\hat{h}(\tau) = -\frac{1}{2\theta\sqrt{\mu}} \int_{-\beta}^{\tau} (1 - e^{2\theta\sqrt{\mu}(\tau-\sigma)})g(-\sigma)(1 + \hat{h}(\sigma)) d\sigma, \quad \tau \in (-\beta, -\alpha) \quad (3.29)$$

Dabei ist der Realteil der Funktion  $\kappa : (-\beta, -\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau \mapsto -2\theta\sqrt{\mu}\tau$  monoton wachsend. Die Funktion  $G : (-\beta, -\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau \mapsto -\frac{1}{2\theta\sqrt{\mu}}g(-\tau)$  ist wegen

$$\int_{x_1}^b \mathcal{E}(y) dy = \frac{\omega}{2\sqrt{\mu}} \int_{\nu(x_1)}^{\beta} g(s) ds = \frac{\omega}{2\sqrt{\mu}} \int_{-\beta}^{-\nu(x_1)} g(-\sigma) d\sigma$$

nach Voraussetzung auf dem Intervall  $(-\beta, -\nu(x_1))$  integrierbar. Mit [Satz 3.3](#) erhalten wir eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\hat{h} : (-\beta, -\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ , welche [\(3.29\)](#) genügt. Die Funktion  $\hat{h}$  genügt den Abschätzungen

$$\left| \hat{h}(\tau) \right| \leq e^{\frac{\omega}{2|\sqrt{\mu}|} \int_{-\beta}^{\tau} |g(-\sigma)| d\sigma} - 1, \quad \tau \in (-\beta, -\alpha) \quad (3.30)$$

und

$$\left| \frac{d\hat{h}}{d\tau}(\tau) \right| \leq \frac{2|\sqrt{\mu}|}{\omega} \left( e^{\frac{\omega}{2|\sqrt{\mu}|} \int_{-\beta}^{\tau} |g(-\sigma)| d\sigma} - 1 \right), \quad \tau \in (-\beta, -\alpha). \quad (3.31)$$

Des Weiteren erfüllt  $\hat{h}$  nach [Satz 3.3](#) die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2\hat{h}}{d\tau^2}(\tau) - 2\theta\sqrt{\mu}\frac{d\hat{h}}{d\tau}(\tau) = g(-\tau)(1 + \hat{h}(\tau)), \quad \tau \in (-\beta, -\alpha).$$

Mittels Rücktransformation  $h(t) = \hat{h}(-t)$  sehen wir, dass die Funktion  $h : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$  wegen  $\frac{dh}{dt}(t) = -\frac{d\hat{h}}{d\tau}(-t)$  sowie  $\frac{d^2h}{dt^2}(t) = \frac{d^2\hat{h}}{d\tau^2}(-t)$  die Differentialgleichung [\(3.10\)](#) erfüllt. Somit erhalten wir analog zum ersten Fall auf Grund der Beziehung [\(3.11\)](#) für  $R_2 := h \circ \nu$  eine Lösung  $f_2$  der Differentialgleichung [\(3.21\)](#) der Form [\(3.23\)](#),

$$f_2(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\sqrt{\mu}\nu(x)}(1 + R_2(x)), \quad x \in (a, b).$$

Wir müssen noch zeigen, dass die  $R_2$  die Abschätzungen erfüllt. Dafür betrachten wir erneut die Ungleichungen [\(3.30\)](#) und [\(3.31\)](#). Es gilt mit  $-\tau = t = \nu(x)$  für  $x \in (a, b)$  sowie  $\sigma = -s$

$$|R_2(x)| = \left| \hat{h}(\tau) \right| \leq e^{\frac{\omega}{2|\sqrt{\mu}|} \int_{\nu(x)}^{\beta} |g(s)| ds} - 1 = e^{\int_x^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1$$

und

$$|R_2'(x)| = \left| \frac{dh}{dt}(\nu(x)) \cdot \frac{d\nu}{dx}(x) \right| = \left| \frac{d\hat{h}}{d\tau}(-\nu(x)) \right| \left| \sqrt{r(x)} \right| \leq \frac{2|\sqrt{r(x)}\sqrt{\mu}|}{\omega} \left( e^{\int_x^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1 \right).$$

3. Es gelte die Bedingung  $\operatorname{Re}(\theta\sqrt{\mu}) \neq 0$ . Diese ist wegen  $\theta \in \{-1, 1\}$  genau dann erfüllt, wenn  $\sqrt{\mu}$  nicht auf der imaginären Achse liegt. Nach Definition der komplexen Quadratwurzel kann  $\mu$  daher nicht auf der nichtpositiven Halbachse  $(-\infty, 0]$  liegen. Für eine reellwertige Funktionen  $p$  folgt insbesondere durch die Faktorisierung  $p = \mu \cdot r$  mit einer positiven Funktion  $r$ , dass sich  $\mu$  auf der positiven Halbachse  $(0, \infty)$  befindet. Ist ferner die Funktion  $q$  reellwertig,



### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

so sind es auch die Funktionen  $\nu, \eta, g$  und jeweils die Funktion  $h$  nach (3.26) beziehungsweise  $\hat{h}$  nach (3.29). Folglich sind  $R_1$  und  $R_2$  sowie die konstruierten Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  reellwertige Funktionen, falls diese existieren.  $\square$

Im letzten Satz haben wir nur die Fälle betrachtet, in denen der Realteil von  $\sqrt{\mu}$  für die Faktorisierung  $p = \mu \cdot r$  mit  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und einer positiven Funktion  $r$  nicht verschwindet. Im dritten Teil des Beweises haben wir außerdem gesehen, dass der Realteil von  $\sqrt{\mu}$  auf Grund der Wurzeldefinition genau dann verschwindet, wenn  $\mu$  auf der negativen Halbachse  $(-\infty, 0)$  liegt. Ohne Einschränkung kann man in diesem Fall annehmen, dass  $p = -r$  gilt. Mit dieser Situation beschäftigt sich der nachfolgende Satz. Diesen findet man auch unter [39, Chapter 6, Theorem 2.2].

**Satz 3.5** *Wir betrachten im offenen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  für eine zweimal stetig differenzierbare, positive Funktion  $r : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$  und eine stetige Funktion  $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  die Differentialgleichung*

$$\frac{df}{dx^2}(x) = (-r(x) + q(x))f(x), \quad x \in (a, b). \quad (3.32)$$

Es seien  $x_0 \in (a, b)$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Ist die Funktion  $\mathcal{E} : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\mathcal{E}(x) = -i \left( \frac{4r''(x)r(x) - 5(r'(x))^2}{16(r(x))^{\frac{5}{2}}} + \frac{q(x)}{(r(x))^{\frac{1}{2}}} \right), \quad x \in (a, b), \quad (3.33)$$

für ein  $x_1 \in (a, b)$  über  $(a, x_1)$  integrierbar, so existieren Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  der Differentialgleichung (3.32) in der Form

$$f_k(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{(-1)^{k-1}i \left( \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c \right)} (1 + R_k(x)), \quad x \in (a, b), \quad k = 1, 2, \quad (3.34)$$

mit stetig differenzierbaren Funktion  $R_1, R_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ , welche die Abschätzungen

$$|R_k(x)| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(x)| dx} - 1, \quad x \in (a, b), \quad k = 1, 2$$

und

$$\left| (r(x))^{-\frac{1}{2}} R'_k(x) \right| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(x)| dx} - 1, \quad x \in (a, b), \quad k = 1, 2,$$

erfüllen.

2. Ist die Funktion  $\mathcal{E} : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  wie in (3.33) für ein  $x_1 \in (a, b)$  über  $(x_1, b)$  integrierbar, so existieren Lösungen  $f_3$  und  $f_4$  der Differentialgleichung (3.32) in der Form

$$f_k(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{(-1)^{k-3}i \left( \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c \right)} (1 + R_k(x)), \quad x \in (a, b), \quad k = 3, 4, \quad (3.35)$$

mit stetig differenzierbaren Funktion  $R_3, R_4 : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ , welche die Abschätzungen

$$|R_k(x)| \leq e^{\int_x^b |\mathcal{E}(x)| dx} - 1, \quad x \in (a, b), \quad k = 3, 4$$

und

$$\left| (r(x))^{-\frac{1}{2}} R'_k(x) \right| \leq e^{\int_x^b |\mathcal{E}(x)| dx} - 1, \quad x \in (a, b), \quad k = 3, 4,$$

erfüllen.

**Beweis.** Es sei  $\nu : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  wie in (3.2) erklärt und  $\eta = \nu^{-1}$  die Inverse. Wieder sei das offene Intervall  $\text{ran}(\nu)$  mit  $(\alpha, \beta)$  bezeichnet. Außerdem sei  $\theta \in \{-1, 1\}$ .

1. Es sei nach Voraussetzung  $\mathcal{E}$  in (3.33) über  $(a, x_1)$  für ein  $x_1 \in (a, b)$  integrierbar. Mit (3.7) und

$$\int_a^{x_1} \mathcal{E}(y) dy = \int_a^{\nu(x_1)} \mathcal{E}(\eta(s)) (r(\eta(s)))^{-\frac{1}{2}} ds = -i \int_a^{\nu(x_1)} g(s) ds$$

erhalten wir die Integrierbarkeit der Funktion  $G : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto -\frac{i}{2\theta} g(t)$  über dem Intervall  $(\alpha, \nu(x_1))$ . Des Weiteren besitzen die Abbildungen  $\kappa : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto 2i\theta t$  verschwindenden Realteil, wodurch dieser unabhängig von  $\theta \in \{-1, 1\}$  eine monoton wachsende Funktion darstellt. Satz 3.3 liefert in Hinblick auf  $\kappa$  und  $G$  eine stetig differenzierbare Funktion  $h_\theta : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ , welche die Integralgleichung

$$h_\theta(t) = -\frac{i}{2\theta} \int_\alpha^t (1 - e^{-2i\theta(t-s)}) g(s) (1 + h_\theta(s)) ds, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

sowie die Abschätzungen

$$|h_\theta(t)| \leq e^{\int_\alpha^t |g(s)| ds} - 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{dh_\theta}{dt}(t) \right| \leq e^{\int_\alpha^t |g(s)| ds} - 1, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

erfüllt. Außerdem genügt  $h_\theta$  in  $(\alpha, \beta)$  der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 h_\theta}{dt^2} + 2i\theta \frac{dh_\theta}{dt} = g \cdot (1 + h_\theta).$$

Durch Rücktransformation mittels (3.11) erhalten wir in Abhängigkeit von  $\theta$  eine Lösung  $f_\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  der Differentialgleichung (3.32) mit

$$f_\theta(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta i \nu(x)} (1 + h_\theta(\nu(x))), \quad x \in (a, b),$$

wobei die Abbildung  $h_\theta \circ \nu$  für  $x \in (a, b)$  die Ungleichungen

$$|h_\theta(\nu(x))| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy} - 1 \quad \text{und} \quad \left| (r(x))^{-\frac{1}{2}} \frac{d(h_\theta \circ \nu)}{dx}(x) \right| = \left| \frac{dh_\theta}{dt}(\nu(x)) \right| \leq e^{\int_a^x |\mathcal{E}(y)| dy} - 1$$

### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

erfüllt. Für  $\theta = 1$  ist  $f_\theta$  die Lösung  $f_1$  mit  $R_1 = h_\theta \circ \nu$ . Entsprechend erhalten wir für  $\theta = -1$  die Lösung  $f_2$  mit  $R_2 = h_\theta \circ \nu$ .

2. Die Funktion  $\mathcal{E}$  in (3.33) sei über  $(x_1, b)$  für ein  $x_1 \in (a, b)$  integrierbar. Wir sehen mit (3.7) und

$$\int_{x_1}^b \mathcal{E}(y) dy = -i \int_{\nu(x_1)}^\beta g(s) ds = -i \int_{-\beta}^{-\nu(x_1)} g(-\sigma) d\sigma,$$

dass die Abbildung  $G : (-\beta, -\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau \mapsto \frac{i}{2\theta} g(-\tau)$  über  $(-\beta, -\nu(x_1))$  integrierbar ist. Des Weiteren verschwindet für  $\theta \in \{-1, 1\}$  der Realteil der Abbildung  $\kappa : (-\beta, -\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau \mapsto -2i\theta\tau$ , weshalb dieser eine monoton wachsende Funktion ist. Aus Satz 3.3 erhalten wir eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $\hat{h}_\theta : (-\beta, -\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ , welche die Integralgleichung

$$\hat{h}_\theta(\tau) = \frac{i}{2\theta} \int_{-\beta}^\tau (1 - e^{2i\theta(\tau-\sigma)}) g(-\sigma) (1 + \hat{h}_\theta(\sigma)) d\sigma, \quad \tau \in (-\beta, -\alpha)$$

sowie die Ungleichungen

$$\left| \hat{h}_\theta(\tau) \right| \leq e^{\int_{-\beta}^\tau |g(-\sigma)| d\sigma} - 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{d\hat{h}_\theta}{d\tau}(\tau) \right| \leq e^{\int_{-\beta}^\tau |g(-\sigma)| d\sigma} - 1, \quad \tau \in (-\beta, -\alpha)$$

erfüllen. Außerdem genügt  $\hat{h}_\theta$  der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \hat{h}_\theta}{d\tau^2}(\tau) - 2i\theta \frac{d\hat{h}_\theta}{d\tau}(\tau) = g(-\tau)(1 + \hat{h}_\theta(\tau)), \quad \tau \in (-\beta, -\alpha).$$

Definiert man  $h_\theta : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \hat{h}_\theta(-t)$ , so erfüllt  $h_\theta$  in  $(\alpha, \beta)$  wegen  $\frac{dh_\theta}{dt}(t) = -\frac{d\hat{h}_\theta}{d\tau}(-t)$  und  $\frac{d^2 h_\theta}{dt^2}(t) = \frac{d^2 \hat{h}_\theta}{d\tau^2}(-t)$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 h_\theta}{dt^2} + 2i\theta \frac{dh_\theta}{dt} = g \cdot (1 + h_\theta)$$

und wir erhalten mit (3.11) in Abhängigkeit von  $\theta$  eine Lösung  $f_\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f_\theta(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta i \nu(x)} (1 + h_\theta(\nu(x))), \quad x \in (a, b).$$

Die Funktion  $h_\theta \circ \nu$  erfüllt dabei die Abschätzungen

$$|h_\theta(\nu(x))| = \left| \hat{h}_\theta(-\nu(x)) \right| \leq e^{\int_{-\beta}^{-\nu(x)} |g(-\sigma)| d\sigma} - 1 = e^{\int_x^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b)$$

und

$$\left| (r(x))^{-\frac{1}{2}} \frac{d(h_\theta \circ \nu)}{dx}(x) \right| = \left| \frac{d\hat{h}_\theta}{d\tau}(-\nu(x)) \right| \leq e^{\int_x^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b).$$

Für  $\theta = 1$  ist  $f_\theta$  die Lösung  $f_3$  mit  $R_3 = h_\theta \circ \nu$ . Entsprechend erhalten wir für  $\theta = -1$  die Lösung  $f_4$  mit  $R_4 = h_\theta \circ \nu$ .  $\square$

Ist die Funktion  $\mathcal{E}$  in [Satz 3.4](#) über dem gesamten Intervall  $(a, b)$  integrierbar, so existieren beide Lösungen  $f_1$  und  $f_2$ , vergleiche [\(3.23\)](#) und [\(3.24\)](#). Die Funktionen  $R_1$  und  $R_2$  sind beide durch

$$|R_k(x)| \leq e^{\int_a^b |\mathcal{E}(y)| dy} - 1, \quad x \in (a, b), \quad k = 1, 2$$

beschränkt. Unter Vernachlässigung der Terme  $R_1(x)$  und  $R_2(x)$  erhält man

$$\hat{f}_{1,2}(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{\pm \sqrt{\mu} \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c}, \quad x \in (a, b). \quad (3.36)$$

Gilt  $\int_a^b |\mathcal{E}(y)| dy < \ln(2)$ , so ist diese Vorgehensweise tatsächlich gerechtfertigt. Wegen  $R_k(x) + 1 \neq 0$  für  $x \in (a, b)$  und  $k = 1, 2$  spielen die Funktionen  $R_1$  und  $R_2$  keine Rolle für das Wachstumsverhalten der Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  nahe  $a$  und  $b$ . Für [Satz 3.5](#) gelten im Hinblick auf  $\mathcal{E}$  nach [\(3.33\)](#) analoge Aussagen. Ist  $\mathcal{E}$  über dem ganzen Intervall  $(a, b)$  integrierbar, so existieren die Lösungen  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$ , vergleiche [\(3.34\)](#) und [\(3.35\)](#). Gilt ferner  $\int_a^b |\mathcal{E}(y)| dy < \ln(2)$ , so kann man auch hier die Terme  $R_k(x)$  für  $k = 1, 2, 3, 4$  vernachlässigen und erhält als Näherung für die Lösungen  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$

$$\hat{f}_{1,3}(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{i \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c}, \quad \hat{f}_{2,4}(x) = (r(x))^{-\frac{1}{4}} e^{-i \int_{x_0}^x \sqrt{r(y)} dy + c} \quad x \in (a, b). \quad (3.37)$$

Die jeweilige Näherung [\(3.36\)](#) und [\(3.37\)](#) der Differentialgleichung [\(3.21\)](#) und [\(3.32\)](#) wird als *WKB- beziehungsweise JWKB-Näherung* bezeichnet. Namensgebend sind dabei *G. Wentzel* [\[50\]](#), *H. Kramers* [\[30\]](#), *L. Brillouin* [\[10\]](#) und *H. Jeffreys* [\[29\]](#), welche diese Näherung unabhängig voneinander im Jahr 1926 publizierten. Eine weitere Bezeichnung dieser Methode ist *Liouville-Green-Approximation*, zurückzuführen auf die früheren Arbeiten von *J. Liouville* [\[33\]](#) und *G. Green* [\[22\]](#).

**Beispiel 3.6** Wir wollen mit Hilfe des [Satzes 3.4](#) für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = (4x^2 + 2)f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.38)$$

aus [Beispiel 3.1](#) Lösungsnaherungen bestimmen. Dafür wählen wir  $p(x) = r(x) = 4x^2 + 2$ ,  $q(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R}$  und die Konstanten  $\mu = 1$ . Außerdem sei  $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nu(x) := \int_0^x \sqrt{4y^2 + 2} dy = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{4x^2 + 2} + \ln \left( \sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 1} \right) \right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

### 3.1 Die WKB-Näherung für reelle Variablen

Folglich ergibt sich die Funktion  $\mathcal{E}$  der Form

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{4r''(x)r(x) - 5(r'(x))^2}{16(r(x))^{\frac{5}{2}}} \right) = \frac{2 - 6x^2}{(4x^2 + 2)^{\frac{5}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe numerischer Integration erhält man, dass  $\mathcal{E}$  über der reellen Achse integrierbar ist und insbesondere

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{E}(y)| dy = 2 \int_0^{\infty} |\mathcal{E}(y)| dy = \frac{1}{60}(8\sqrt{10} - 5) < \ln(2)$$

gilt. [Satz 3.4](#) liefert somit Lösungen  $f_1$  und  $f_2$ ,

$$f_{1,2}(x) = (4x^2 + 2)^{-\frac{1}{4}} e^{\pm \int_0^x \sqrt{4y^2 + 2} dy} (1 + R_{1,2}(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.40)$$

wobei die Funktionen  $R_1$  und  $R_2$  durch

$$|R_{1,2}(x)| \leq e^{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(t)| dt} - 1 < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

beschränkt sind. Man erkennt in (3.40), dass  $|f_1(x)| \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$  während  $|f_2(x)| \rightarrow 0$  gilt. Für  $x \rightarrow -\infty$  hingegen konvergiert  $|f_2(x)| \rightarrow \infty$  und  $|f_1(x)| \rightarrow 0$ . Somit sind die Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  linear unabhängig und bilden eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung (3.38). Wir können nun die Lösungen  $f_1$  und  $f_2$  unter Vernachlässigung der Terme  $R_1(x)$  beziehungsweise  $R_2(x)$  jeweils durch

$$\hat{f}_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}_{1,2}(x) = (4x^2 + 2)^{-\frac{1}{4}} e^{\pm \int_0^x \sqrt{4t^2 + 2} dt}, \quad x \in \mathbb{R}$$

approximieren. Mit (3.39) erhalten wir

$$\hat{f}_{1,2}(x) = (4x^2 + 2)^{-\frac{1}{4}} (\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 1})^{\pm \frac{1}{2}} e^{\pm \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2 + 2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen die Linearkombination  $\hat{f} = \alpha \hat{f}_1 + \beta \hat{f}_2$  für komplexe Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  und wollen mit ihrer Hilfe die tatsächliche Lösung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \rightarrow e^{x^2}$ , vergleiche [Beispiel 3.1](#), approximieren. Es gilt für  $x < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}_2(x)}{f(x)} &= (4x^2 + 2)^{-\frac{1}{4}} (\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 1})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{4x^2 + 2} - x^2} \\ &= 2^{-\frac{1}{4}} \left( x\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 1} + 2x^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{|x|^2 \sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}} - x^2} \\ &= 2^{-\frac{1}{4}} \left( -2|x|^2 \sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}} + 2x^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} e^{|x|^2 \sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}} - x^2} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2x^2} \right)^2 \pm \dots \quad \text{für } 2^{-\frac{1}{2}} < |x|$$

erhalten wir für  $x < -2^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\hat{f}_2(x)}{f(x)} = 2^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{2} - 2x^2 \left( -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2x^2} \right)^2 \pm \dots \right) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4} + x^2 \left( -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2x^2} \right)^2 \pm \dots \right)}.$$

Analog sieht man für  $x > 2^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\hat{f}_1(x)}{f(x)} = 2^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2}}} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4} + x^2 \left( -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2x^2} \right)^2 \pm \dots \right)}.$$

Für  $x \rightarrow \infty$  konvergiert  $\hat{f}_1(x)(f(x))^{-1}$  gegen  $(2e)^{\frac{1}{4}}$  sowie offenbar  $\hat{f}_2(x)(f(x))^{-1}$  gegen 0. Außerdem erhält man die Konvergenz von  $\hat{f}_2(x)(f(x))^{-1}$  gegen  $(2e)^{\frac{1}{4}}$  und  $\hat{f}_1(x)(f(x))^{-1}$  gegen 0 für  $x \rightarrow -\infty$ . Insgesamt erhält man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}_1(x)}{f(x)} = (2e)^{\frac{1}{4}} \alpha \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\hat{f}_2(x)}{f(x)} = (2e)^{\frac{1}{4}} \beta.$$

### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) = (p(z) + q(z))f(z), \quad z \in D \tag{3.41}$$

für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$ . Die Koeffizienten  $p : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $q : D \rightarrow \mathbb{C}$  seien analytische Funktionen, wobei  $p$  in  $D$  nicht verschwinde. Für feste  $z_0 \in D$  und  $c \in \mathbb{C}$  definieren wir analog zum reellen Fall die *Liouville-Transformation* wie folgt,

$$\nu : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_{z_0}^z (p(y))^{\frac{1}{2}} dy + c. \tag{3.42}$$

Dabei seien Potenzen der Funktion  $p$  über einen Zweig  $h$  des Logarithmus von  $p$  nach [Lemma 2.8](#) definiert. Speziell seien somit  $(p(z))^{\frac{1}{2}} := e^{\frac{1}{2}h(z)}$  und  $(p(z))^{\frac{1}{4}} := e^{\frac{1}{4}h(z)}$  für  $z \in D$ . Der Integrand in (3.42) ist folglich analytisch, woraus als Konsequenz des Cauchyschen Integrsatzes die Wegunabhängigkeit des Integrals gilt. Des Weiteren ist  $\nu : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion, wobei die Ableitung  $\nu'(z) = (p(z))^{\frac{1}{2}}$  für kein  $z \in D$  verschwindet.

Da  $\nu$  im Allgemeinen nicht injektiv ist, zerlegen wir  $D$  in offene Mengen, in denen die jeweiligen Einschränkungen von  $\nu$  injektiv sind. Grundlage dafür bildet [Satz 2.4](#). Folglich

### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

existiert für jedes  $z \in D$  eine offene Kugel  $B_r(z) \subset D$  mit Radius  $r > 0$ , sodass  $\nu|_{B_r(z)}$  injektiv ist. Wir fassen in der Menge  $\mathcal{U}$  alle diese Kugeln zusammen,

$$\mathcal{U} = \left\{ B_r(z) \subset D \mid z \in D, \quad r > 0, \quad \nu|_{B_r(z)} \text{ ist injektiv} \right\}.$$

Offenbar gilt  $D = \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B$ . Wir bezeichnen im folgenden für  $B \in \mathcal{U}$  mit  $\nu_B$  die Einschränkung  $\nu|_B$  und mit  $\eta_B$  die Inverse  $\nu_B^{-1}$ . Außerdem definieren wir  $V_B := \nu(B)$ . Nach [Satz 2.4](#) ist  $\eta_B : V_B \rightarrow B$  eine analytische Funktion und es gilt

$$\nu_B'(z) = (p(z))^{\frac{1}{2}}, \quad z \in B \quad \text{sowie} \quad \eta_B'(\zeta) = (p(\eta_B(\zeta)))^{-\frac{1}{2}}, \quad \zeta \in V_B.$$

Da  $B$  eine offene Kugel und somit insbesondere ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, erhalten wir mit der Stetigkeit der Abbildungen  $\nu_B$  und  $\eta_B$ , dass auch  $V_B$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

Es sei eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung [\(3.41\)](#) gegeben. Für  $B \in \mathcal{U}$  definieren wir

$$F_B(\zeta) := \left( \frac{d\nu_B}{dz}(\eta_B(\zeta)) \right)^{\frac{1}{2}} f(\eta_B(\zeta)) = (p(\eta_B(\zeta)))^{\frac{1}{4}} f(\eta_B(\zeta)), \quad \zeta \in V_B. \quad (3.43)$$

Die Abbildung  $F_B : V_B \rightarrow \mathbb{C}$  ist offenbar analytisch und wir können ihre ersten beiden Ableitungen berechnen. Dabei übertragen sich bekanntermaßen Ableitungsregeln, wie Produktregel und Kettenregel der Differentiation im Reellen auf die komplexe Differentiation. Wir unterdrücken im Folgenden die Funktionsargumente  $\zeta$  und  $\eta_B(\zeta)$ . Damit erhalten wir analog zum reellen Fall durch Ableitung von  $F_B$  nach  $\zeta$

$$p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dF_B}{d\zeta} = \frac{1}{4} p^{-\frac{3}{4}} p' f + p^{\frac{1}{4}} f' \quad (3.44)$$

sowie durch Differentiation der Gleichung [\(3.44\)](#) und anschließende Multiplikation mit  $p^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} p' \frac{dF_B}{d\zeta} + p \frac{d^2 F_B}{d\zeta^2} = -\frac{3}{16} p^{-\frac{7}{4}} (p')^2 f + \frac{1}{4} p^{-\frac{3}{4}} p'' f + \frac{1}{2} p^{-\frac{3}{4}} p' f' + p^{\frac{1}{4}} f''. \quad (3.45)$$

Die Tatsache, dass  $f$  in  $D$  eine Lösung der Differentialgleichung  $f'' = (p + q)f$  ist, sowie die Gleichungen [\(3.44\)](#) und [\(3.45\)](#) zusammen mit der Definition von  $F$  in [\(3.43\)](#) liefern

$$\frac{d^2 F_B}{d\zeta^2} = \left( \frac{p''}{4p^2} - \frac{5(p')^2}{16p^3} + 1 + \frac{q}{p} \right) F_B.$$

Die Funktion  $F_B$  ist damit eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F_B}{d\zeta^2}(\zeta) = (1 + g_B(\zeta)) F_B(\zeta), \quad \zeta \in V_B \quad (3.46)$$

für die analytischen Funktionen  $g_B : V_B \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g_B(\zeta) = \frac{4p''(\eta_B(\zeta))p(\eta_B(\zeta)) - 5(p'(\eta_B(\zeta)))^2}{16(p(\eta_B(\zeta)))^3} + \frac{q(\eta_B(\zeta))}{p(\eta_B(\zeta))}, \quad \zeta \in V_B.$$

Wir können die Funktion  $F_B$  als Produkt

$$F_B(\zeta) = e^{\theta\zeta}(1 + h_B(\zeta)), \quad \zeta \in V_B \quad (3.47)$$

mit einer analytischen Funktion  $h_B : V_B \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\theta \in \{-1, 1\}$  darstellen, wobei für  $\zeta \in V_B$  die Beziehung  $h_B(\zeta) = e^{-\theta\zeta}F_B(\zeta) - 1$  erfüllt ist. Für die ersten beiden Ableitungen von  $F_B$  gilt

$$\frac{dF_B}{d\zeta}(\zeta) = \theta e^{\theta\zeta}(1 + h_B(\zeta)) + e^{\theta\zeta} \frac{dh_B}{d\zeta}(\zeta), \quad \zeta \in V_B$$

sowie mit (3.46) für  $\zeta \in V_B$

$$\begin{aligned} \frac{d^2F_B}{d\zeta^2}(\zeta) &= \theta^2 e^{\theta\zeta}(1 + h_B(\zeta)) + 2\theta e^{\theta\zeta} \frac{dh_B}{d\zeta}(\zeta) + e^{\theta\zeta} \frac{d^2h_B}{d\zeta^2}(\zeta) \\ &= (1 + g_B(\zeta))e^{\theta\zeta}(1 + h_B(\zeta)). \end{aligned}$$

Durch Umstellen der letzten Gleichung unter Ausnutzung von  $\theta^2 = 1$  erhalten wir für  $h_B$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2h_B}{d\zeta^2}(\zeta) + 2\theta \frac{dh_B}{d\zeta}(\zeta) = g_B(\zeta)(h_B(\zeta) + 1), \quad \zeta \in V_B. \quad (3.48)$$

**Lemma 3.7** *Es sei  $\theta \in \{-1, 1\}$ . Ist  $f$  eine Lösung der Differentialgleichung (3.41), dann stellt für  $B \in \mathcal{U}$  die Funktion  $h_B$  mit*

$$h_B(\zeta) = (p(\eta_B(\zeta)))^{\frac{1}{4}} e^{-\theta\zeta} f(\eta_B(\zeta)) - 1, \quad \zeta \in V_B \quad (3.49)$$

eine Lösung der Differentialgleichung dar (3.48).

Ist für  $B \in \mathcal{U}$  die Funktion  $h_B$  eine Lösung von (3.48), so ist durch

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta\nu_B(z)}(1 + h_B(\nu_B(z))), \quad z \in B. \quad (3.50)$$

eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (3.41) gegeben.

**Beweis.** Der erste Teil folgt direkt aus den bisherigen Betrachtungen, insbesondere aus (3.43) und (3.47).

Es sei für  $B \in \mathcal{U}$  eine Lösung  $\tilde{h}_B$  der Differentialgleichung (3.48) gegeben. Wir betrachten für einen Punkt  $\zeta_0 \in V_B$  mit  $z_0 := \eta_B(\zeta_0)$  die Anfangswerte  $c_0 := \tilde{h}_B(\zeta_0)$  und  $c_1 := \frac{d\tilde{h}_B}{d\zeta}(\zeta_0)$ .



### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

Nach [Satz 2.15](#) existiert eine eindeutige Lösung  $f$  der Differentialgleichung [\(3.41\)](#) mit  $f(z_0) = (p(z_0))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu_B(z_0)} (1 + c_0)$  und

$$f'(z_0) = e^{\theta \nu_B(z_0)} (p(z_0))^{-\frac{1}{4}} \left( \left( \theta \nu_B'(z_0) - \frac{1}{4} (p(z_0))^{-1} p'(z_0) \right) (1 + c_0) + c_1 \nu_B'(z_0) \right). \quad (3.51)$$

Unter Anwendung des ersten Teils von [Lemma 3.7](#) existiert eine Lösung  $h_B$  der Differentialgleichung [\(3.48\)](#) der Form [\(3.49\)](#). Durch Umstellen erhalten wir daraus die Beziehung

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu_B(z)} (1 + h_B(\nu_B(z))), \quad z \in B. \quad (3.52)$$

Da  $p$  in  $D$  nicht verschwindet folgt, dass  $h_B(\zeta_0) = h_B(\nu_B(z_0)) = c_0 = \tilde{h}_B(\zeta_0)$  gilt. Leiten wir in [\(3.52\)](#) beide Seiten nach  $z$  ab, so erhalten wir für  $z \in B$

$$\begin{aligned} f'(z) = & -\frac{1}{4} (p(z))^{-\frac{5}{4}} p'(z) e^{\theta \nu_B(z)} (1 + h_B(\nu_B(z))) + \theta (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu_B(z)} \nu_B'(z) (1 + h_B(\nu_B(z))) \\ & + (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu_B(z)} \frac{dh_B}{d\zeta}(\nu_B(z)) \nu_B'(z). \end{aligned}$$

Wegen  $\nu_B'(z) = (p(z))^{\frac{1}{2}} \neq 0$  für  $z \in B$  sieht man durch Einsetzen von  $z = z_0 = \eta_B(\zeta_0)$  mit der Gleichung [\(3.51\)](#), dass  $\frac{dh_B}{d\zeta}(\zeta_0) = c_1 = \frac{d\tilde{h}_B}{d\zeta}(\zeta_0)$  gilt. Nach [Satz 2.15](#) stimmen  $h_B$  und  $\tilde{h}_B$  in  $V_B$  überein.  $\square$

**Satz 3.8** *Es sei  $\theta \in \{-1, 1\}$ . Wir betrachten für eine analytische Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu(z)} (1 + R(z)), \quad z \in D. \quad (3.53)$$

Außerdem definieren wir die analytische Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) = \frac{4p''(z)p(z) - 5(p'(z))^2}{16(p(z))^3} + \frac{q(z)}{p(z)}, \quad z \in D.$$

Dann ist  $f$  genau dann eine Lösung der Differentialgleichung [\(3.41\)](#), wenn  $R$  die Differentialgleichung

$$R''(z) + \left( 2\theta \nu'(z) - \frac{\nu''(z)}{\nu'(z)} \right) R'(z) = g(z) (\nu'(z))^2 (1 + R(z)), \quad z \in D \quad (3.54)$$

löst.

**Beweis.** 1. Es sei  $f$  eine Lösung der Differentialgleichung [\(3.41\)](#). Nach [Lemma 3.7](#) existiert für jedes  $B \in \mathcal{U}$  eine Lösung  $h_B$  der Differentialgleichung [\(3.48\)](#), wobei für  $z \in B$  die Lösung

$f$  der Darstellung

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu_B(z)} (1 + h_B(\nu_B(z))), \quad z \in B$$

genügt. Für  $A, B \in \mathcal{U}$  stimmen dabei  $h_A$  und  $h_B$  in  $\nu(A \cap B)$  überein. Folglich ist die Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $R(z) := h_B(\nu_B(z))$  für  $z \in B$  wohldefiniert und wegen der Analytizität der Abbildungen  $\nu_B$  und  $h_B$  analytisch in  $D$ . Für die ersten beiden Ableitungen der Funktion  $R$  innerhalb von  $B \in \mathcal{U}$  ergeben sich

$$R'(z) = \frac{dh_B}{d\zeta}(\nu_B(z)) \nu_B'(z), \quad z \in B \quad (3.55)$$

und

$$R''(z) = \frac{d^2 h_B}{d\zeta^2}(\nu_B(z)) (\nu_B'(z))^2 + \frac{dh_B}{d\zeta}(\nu_B(z)) \nu_B''(z), \quad z \in B.$$

Unter Anwendung von (3.55) und (3.48) erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$R''(z) = \left( -2\theta \nu_B'(z) + \frac{\nu_B''(z)}{\nu_B'(z)} \right) R'(z) + g_B(\nu_B(z)) (\nu_B'(z))^2 (1 + R(z)), \quad z \in B. \quad (3.56)$$

Nach Definition entspricht  $g_B(\nu_B(z)) = g(z)$  für  $z \in B$ . Außerdem stimmen für  $B \in \mathcal{U}$  die Abbildungen  $\nu$  und  $\nu_B$  in  $B$  überein. Somit sieht man durch Fortsetzung der Gleichung (3.56) in  $D = \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B$ , dass  $R$  zum einen der Gleichung (3.53) genügt und zum anderen die Differentialgleichung (3.54) löst.

2. Es sei  $\tilde{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung (3.54). Wir definieren für ein  $B \in \mathcal{U}$  die Funktion  $h_B := \tilde{R} \circ \eta_B$ . Für die ersten beiden Ableitungen von  $h_B$  gilt

$$\frac{dh_B}{d\zeta}(\zeta) = R'(\eta_B(\zeta)) \frac{d\eta_B}{d\zeta}(\zeta). \quad \zeta \in V_B$$

und, da  $\tilde{R}$  Lösung der Differentialgleichung (3.54) ist, für  $\zeta \in V_B$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_B}{d\zeta^2}(\zeta) &= R''(\eta_B(\zeta)) \left( \frac{d\eta_B}{d\zeta}(\zeta) \right)^2 + R'(\eta_B(\zeta)) \frac{d^2 \eta_B}{d\zeta^2}(\zeta) \\ &= \left( \frac{\nu''(\eta_B(\zeta))}{\nu'(\eta_B(\zeta))} - 2\theta \nu'(\eta_B(\zeta)) \right) R'(\eta_B(\zeta)) \left( \frac{d\eta_B}{d\zeta}(\zeta) \right)^2 \\ &\quad + g(\eta_B(\zeta)) (\nu'(\eta_B(\zeta)))^2 (1 + R(\eta_B(\zeta))) \left( \frac{d\eta_B}{d\zeta}(\zeta) \right)^2 + R'(\eta_B(\zeta)) \frac{d^2 \eta_B}{d\zeta^2}(\zeta). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $\nu_B$  die Einschränkung von  $\nu$  auf  $B$ . Des Weiteren folgen aus  $\nu_B^{-1} = \eta_B$  die Beziehungen  $\frac{d\eta_B}{d\zeta}(\zeta) = \frac{1}{\nu_B'(\eta_B(\zeta))}$  und  $\frac{d^2 \eta_B}{d\zeta^2}(\zeta) = -\frac{\nu_B''(\eta_B(\zeta))}{(\nu_B'(\eta_B(\zeta)))^3}$  für  $\zeta \in V_B$ . Damit erhalten

### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

wir weiter

$$\frac{d^2 h_B}{d\zeta^2}(\zeta) = -2\theta \frac{dh_B}{d\zeta}(\zeta) + g(\eta_B(\zeta))(1 + h_B(\zeta)), \quad \zeta \in V_B.$$

Offenbar gilt  $g(\eta_B(\zeta)) = g_B(\zeta)$  für  $\zeta \in V_B$ . Somit erfüllt  $h_B$  die Differentialgleichung (3.48). Lemma 3.7 liefert eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (3.41), welche für  $z \in B$  die Beziehung

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu_B(z)} (1 + h_B(\nu_B(z)))$$

erfüllt. Nach Teil 1 existiert eine Lösung  $R$  der Differentialgleichung (3.54), sodass auch

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \nu(z)} (1 + R(z))$$

für  $z \in D$  gilt. Somit stimmen  $\tilde{R} = h_B \circ \nu_B$  und  $R$  sowie ihre Ableitungen in  $B$  überein. Satz 2.15 liefert die Identität von  $\tilde{R}$  und  $R$  in ganz  $D$ .  $\square$

Bevor wir die WKB-Methode für den komplexen Fall erweitern benötigen wir noch weitere Hilfsmittel. Wesentlich für den Nachweis oberer Schranken ist dabei die Gronwallsche Ungleichung. Zur Erinnerung zitieren wir diese aus [48].

**Satz 3.9** *Es seien stetige Funktionen  $a, b, u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem abgeschlossenen Intervall  $[t_0, t_1]$  für  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 < t_1$ , gegeben. Zudem sei  $b$  eine nichtnegative Funktion und es gelte die Ungleichung*

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t b(\tau) u(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Dann gilt

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t a(\tau) b(\tau) e^{\int_{\tau}^t b(s) ds} d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Ist  $a$  zusätzlich eine monoton wachsende Funktion, so gilt

$$u(t) \leq a(t) e^{\int_{t_0}^t b(\tau) d\tau}, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Die Konstruktion von Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung  $f'' = (p + q)f$  erfolgt ähnlich wie im reellen Fall über Lösungen der Differentialgleichung (3.54). Dabei ist es von zentraler Bedeutung diese Gleichung entlang von speziellen Wegen zu betrachten. Abweichend von der gängigen Definition eines Weges innerhalb der komplexen Ebene, wollen wir zulassen, dass Wege im Unendlichen beginnen können. Es bezeichne dazu  $\bar{\mathbb{C}}$  die Erweiterung der komplexen Zahlenebene um einen unendlich fernen Punkt,  $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Wir wollen  $\bar{\mathbb{C}}$  mit einer Topologie  $\mathcal{T}$  versehen (vergleiche [42]). Dafür sammeln wir in  $\mathcal{T}$  zum einen alle offene

Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Außerdem enthalte  $\mathcal{T}$  für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{C}$  ihr mit  $\{\infty\}$  vereinigt Komplement bezüglich  $\mathbb{C}$ , das heißt  $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\} \in \mathcal{T}$ . Die Menge  $\overline{\mathbb{C}}$  bildet zusammen mit dem Mengensystem  $\mathcal{T}$  einen topologischen Raum, wobei  $\overline{\mathbb{C}}$  den topologischen Abschluss der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}$  darstellt.

Wir bezeichnen im Folgenden eine stetige Abbildung  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$  mit  $-\infty \leq t_0 < t_1 < \infty$  als *Weg*, wenn der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{t \searrow t_0} \gamma(t)$  in  $\overline{\mathbb{C}}$  existiert. Außerdem führen wir für einen Weg  $\gamma$  mit Bild in  $D$  die Notation  $\gamma_\nu$  für die Verkettung  $\nu \circ \gamma$  ein. Dabei übertragen sich Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Abbildung  $\gamma$  wegen der Analytizität von  $\nu$  auf  $\gamma_\nu$ . Insbesondere ist  $\gamma_\nu$  ein Weg in  $\text{ran}(\nu)$ .

**Definition 3.10** Es sei  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$  ein Weg.

1. Ist  $\gamma$  in  $(t_0, t_1)$  zweimal stetig differenzierbar mit nicht verschwindender erster Ableitung  $\dot{\gamma}$ , so bezeichnen wir  $\gamma$  als *regulären  $\mathcal{C}^2$ -Weg*.
2. Es sei eine endliche Zerlegung  $t_0 := \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n := t_1$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , sodass
  - (i) für jedes  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  die Einschränkung  $\gamma|_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}$  ein regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Weg ist,
  - (ii) für jedes  $k \in \{1, \dots, n-2\}$  die rechts- und linksseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t \searrow \tau_k} \dot{\gamma}(t), \quad \lim_{t \nearrow \tau_{k+1}} \dot{\gamma}(t), \quad \lim_{t \searrow \tau_k} \ddot{\gamma}(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \nearrow \tau_{k+1}} \ddot{\gamma}(t)$$

existieren,

- (iii) die rechts- und linksseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t \searrow \tau_{n-1}} \dot{\gamma}(t), \quad \lim_{t \searrow \tau_{n-1}} \ddot{\gamma}(t), \quad \lim_{t \nearrow \tau_1} \dot{\gamma}(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \nearrow \tau_1} \ddot{\gamma}(t)$$

existieren.

Dann bezeichnen wir  $\gamma$  als *Kette regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege*.

**Bemerkung 3.11** Durch die Existenz der einseitigen Grenzwerte der ersten beiden Ableitungen einer Kette  $\gamma$  regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege existieren wegen der Analytizität der Abbildung  $\nu$  auch die einseitigen Grenzwerte der ersten beiden Ableitungen von  $\gamma_\nu = \nu \circ \gamma$ . Dadurch ist gewährleistet, dass  $\dot{\gamma}_\nu$  und  $\ddot{\gamma}_\nu$  auf jedem Kompaktum beschränkt und somit lokal integrierbar sind.

**Lemma 3.12** Es seien  $\theta \in \{-1, 1\}$  und  $R$  eine Lösung der Differentialgleichung (3.54). Dann besitzt  $R$  für  $z, z_1 \in D$  die Gestalt

$$\begin{aligned} R(z) = R(z_1) + \frac{R'(z_1)}{2\theta\nu'(z_1)} \left(1 - e^{-2\theta(\nu(z) - \nu(z_1))}\right) \\ + \frac{1}{2\theta} \int_{z_1}^z \left(1 - e^{-2\theta(\nu(z) - \nu(y))}\right) g(y)\nu'(y)(1 + R(y)) dy. \end{aligned} \tag{3.57}$$

### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

Betrachtet man  $R$  entlang eines regulären  $\mathcal{C}^2$ -Weges  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$ , so erfüllt  $R \circ \gamma$  in  $(t_0, t_1)$  die Gleichung

$$\frac{d^2(R \circ \gamma)}{dt^2} + \left( 2\theta \dot{\gamma}_\nu - \frac{\ddot{\gamma}_\nu}{\dot{\gamma}_\nu} \right) \frac{d(R \circ \gamma)}{dt} = (g \circ \gamma) \cdot (\dot{\gamma}_\nu)^2 (1 + (R \circ \gamma)) \quad (3.58)$$

und hat für  $t, \tau_1 \in (t_0, t_1)$  die Form

$$\begin{aligned} R(\gamma(t)) &= R(\gamma(\tau_1)) + \frac{R'(\gamma(\tau_1))}{2\theta \nu'(\gamma(\tau_1))} \left( 1 - e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(\tau_1))} \right) \\ &+ \frac{1}{2\theta} \int_{\tau_1}^t \left( 1 - e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(s))} \right) g(\gamma(s)) \dot{\gamma}_\nu(s) (1 + R(\gamma(s))) ds. \end{aligned} \quad (3.59)$$

**Beweis.** 1. Wir betrachten die Differentialgleichung (3.54) als inhomogene lineare Differentialgleichung mit Inhomogenität  $(1 + R)(\nu')^2 g$ . Dabei bilden die Funktionen  $R_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto 1$  und  $R_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^{-2\theta \nu(z)}$  ein Paar linear unabhängiger Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Wir wandeln die Differentialgleichung (3.54) in ein äquivalentes zweidimensionales System um (vergleiche Abschnitt 2.5),

$$\begin{pmatrix} R' \\ R'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\nu''}{\nu'} - 2\theta \nu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ R' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1 + R)(\nu')^2 g \end{pmatrix}.$$

Offenbar bilden  $(R_1, R_1')^T$  und  $(R_2, R_2')^T$  eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Wir definieren

$$\Phi := \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_1' & R_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\theta \nu} \\ 0 & -2\theta \nu' e^{-2\theta \nu} \end{pmatrix}.$$

Für  $z, z_1 \in D$  erhalten wir als Inverse der Matrix  $\Phi(z)$

$$\Phi(z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\theta \nu'(z)} \\ 0 & -\frac{1}{2\theta \nu'(z)} e^{2\theta \nu(z)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(z) \Phi(z_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\theta \nu'(z_1)} \left( 1 - e^{-2\theta(\nu(z) - \nu(z_1))} \right) \\ 0 & \frac{\nu'(z)}{\nu'(z_1)} e^{-2\theta(\nu(z) - \nu(z_1))} \end{pmatrix}.$$

Ist  $R$  eine Lösung der Differentialgleichung (3.54), so erhalten wir mit Satz 2.14 für  $z, z_1 \in D$  die Darstellung

$$\begin{pmatrix} R(z) \\ R'(z) \end{pmatrix} = \Phi(z) \Phi(z_1)^{-1} \begin{pmatrix} R(z_1) \\ R'(z_1) \end{pmatrix} + \int_{z_1}^z \Phi(z) \Phi(y)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ (\nu'(y))^2 g(y) (1 + R(y)) \end{pmatrix}^T dy.$$

Betrachtet man dabei nur die erste Komponente, so erhält man (3.57).

2. Es sei  $R$  weiterhin eine Lösung von (3.54). Zusätzlich sei  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$  ein  $\mathcal{C}^2$ -regulärer

Weg. Wir leiten  $R \circ \gamma$  zweimal nach  $t$  ab und erhalten

$$\frac{d(R \circ \gamma)}{dt}(t) = R'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \quad t \in (t_0, t_1)$$

und

$$\frac{d^2(R \circ \gamma)}{dt^2}(t) = R''(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))^2 + R'(\gamma(t))\ddot{\gamma}(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

Auf Grund der Gleichung (3.54) erhalten wir daraus für  $t \in (t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2(R \circ \gamma)}{dt^2}(t) &= \left( \frac{\nu''(\gamma(t))}{\nu'(\gamma(t))} - 2\theta\nu'(\gamma(t)) \right) \dot{\gamma}(t) \frac{d(R \circ \gamma)}{dt}(t) \\ &\quad + (1 + R(\gamma(t))) (\nu'(\gamma(t)))^2 g(\gamma(t)) (\dot{\gamma}(t))^2 + \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t)} \frac{d(R \circ \gamma)}{dt}(t). \end{aligned}$$

Wendet man darauf für  $\gamma_\nu := \nu \circ \gamma$  die beiden Beziehung  $\dot{\gamma}_\nu(t) = \nu'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$  und  $\ddot{\gamma}_\nu(t) = \nu''(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))^2 + \nu'(\gamma(t))\ddot{\gamma}(t)$  an, so erhält man die Gleichung (3.58).

3. Wir gehen analog zum ersten Teil vor. Dazu betrachten wir in  $(t_0, t_1)$  die Differentialgleichung (3.58) als inhomogene Gleichung mit der Inhomogenität  $(g \circ \gamma) \cdot (\dot{\gamma}_\nu)^2 (1 + (R \circ \gamma))$ . Dabei stellen die Funktionen  $h_1 : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto 1$  und  $h_2 : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto e^{-2\theta\gamma_\nu(t)}$  ein Paar linear unabhängiger Lösungen des homogenen Differentialgleichung dar. Durch Umwandlung der Gleichung (3.58) in ein System (vergleiche Abschnitt 2.3) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \frac{d(R \circ \gamma)}{dt} \\ \frac{d^2(R \circ \gamma)}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\ddot{\gamma}_\nu}{\dot{\gamma}_\nu} - 2\theta\dot{\gamma}_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \circ \gamma \\ \frac{d(R \circ \gamma)}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (g \circ \gamma) \cdot (\dot{\gamma}_\nu)^2 (1 + (R \circ \gamma)) \end{pmatrix}.$$

Mittels der Lösungen des homogenen System  $(h_1, \frac{dh_1}{dt})^T$  und  $(h_2, \frac{dh_2}{dt})^T$  definieren wir

$$\Phi := \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ \frac{dh_1}{dt} & \frac{dh_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\theta\gamma_\nu} \\ 0 & -2\theta\dot{\gamma}_\nu e^{-2\theta\gamma_\nu} \end{pmatrix}.$$

Für  $t, \tau \in (t_0, t_1)$  erhalten wir

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\theta\dot{\gamma}_\nu(t)} \\ 0 & -\frac{1}{2\theta\dot{\gamma}_\nu(t)} e^{2\theta\gamma_\nu(t)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(t)\Phi(\tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\theta\dot{\gamma}_\nu(\tau)} (1 - e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(\tau))}) \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}_\nu(t)}{\dot{\gamma}_\nu(\tau)} e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(\tau))} \end{pmatrix}.$$

Wir wenden Satz 2.10 auf eine Lösung  $(R \circ \gamma)$  der Differentialgleichung (3.58) an. Für

### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

$t, \tau \in (t_0, t_1)$  gilt somit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R(\gamma(t)) \\ \frac{d(R \circ \gamma)}{dt}(t) \end{pmatrix} &= \Phi(t)\Phi(\tau)^{-1} \begin{pmatrix} R(\gamma(\tau)) \\ \frac{d(R \circ \gamma)}{dt}(\tau) \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_{\tau}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1} \left( 0, (\dot{\gamma}_{\nu}(s))^2 g(\gamma(s))(1 + R(\gamma(s))) \right)^T ds. \end{aligned}$$

Die Betrachtung der ersten Komponente liefert dabei die Gleichung (3.59).  $\square$

**Definition 3.13** Es sei  $\theta \in \{-1, 1\}$ . Wir betrachten einen regulären  $\mathcal{C}^2$ -Weg  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$ , für den  $\theta \operatorname{Re}(\nu \circ \gamma)$  eine monoton wachsende Funktion ist. Mit  $D_{\gamma}^{\theta}$  bezeichnen wir im Weiteren die Menge aller Punkte  $z \in D$ , sodass eine Kette regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege  $\delta : (t_0, t_2] \rightarrow D$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i)  $\delta(t_2) = z$ ,
- (ii)  $\theta \operatorname{Re}(\nu \circ \delta)$  ist eine monoton wachsende Funktion,
- (iii) der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{t \searrow t_0} \delta(t)$  stimme mit  $\lim_{t \searrow t_0} \gamma(t)$  überein,
- (iv) außerdem existiere ein  $\tau \in (t_0, t_1) \cap (t_0, t_2)$ , sodass  $\gamma$  und  $\delta$  auf dem Intervall  $(t_0, \tau]$  identisch sind.

Der nachstehende Satz fasst die bisherigen Erkenntnisse zusammen und stellt das Analogon der Sätze 3.4 und 3.5 des letzten Abschnitts dar. Er bildet die Grundlage einer Verallgemeinerung der WKB-Approximation für Lösungen von linearer Differentialgleichungen der Ordnung zwei einer komplexen Veränderlichen. Eine vergleichbare Aussage findet sich in [39, Chapter 6, Theorem 11.1].

**Satz 3.14** *Wir betrachten in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  für die analytischen Funktionen  $p, q : D \rightarrow \mathbb{C}$  die Differentialgleichung*

$$f''(z) = (p(z) + q(z))f(z), \quad z \in D. \quad (3.60)$$

*Die Funktion  $p$  habe in  $D$  keine Nullstellen. Wir definieren weiterhin für fest gewählte  $z_0 \in D$  und  $c \in \mathbb{C}$  die analytische Funktion*

$$\nu : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_{z_0}^z (p(y))^{\frac{1}{2}} dy + c.$$

*Es sei für  $-\infty \leq t_0 < t_1 < \infty$  ein regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Weg  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$  gegeben. Ferner sei für  $\theta \in \{-1, 1\}$  die Funktion  $\theta \operatorname{Re}(\nu \circ \gamma)$  in  $(t_0, t_1]$  monoton wachsend und es existiere das Integral*

$$\int_{t_0}^{t_1} |\mathcal{E}(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)| ds < \infty$$

für die Funktion  $\mathcal{E} : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\mathcal{E}(z) = \frac{4p''(z)p(z) - 5(p'(z))^2}{16(p(z))^{\frac{5}{2}}} + \frac{q(z)}{(p(z))^{\frac{1}{2}}}, \quad z \in D.$$

Dann gibt es eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (3.60) der Form

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \left( \int_{z_0}^z ((p(y))^{\frac{1}{2}} dy + c \right)} (1 + R(z)), \quad z \in D \quad (3.61)$$

mit einer analytischen Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $z \in D_\gamma^\theta$  sei  $\delta : (t_0, t_2] \rightarrow D$  eine Kette  $\mathcal{C}^2$ -regulärer Wege wie in Definition 3.13. Dann erfüllt  $R$  die Abschätzungen

$$|R(z)| \leq e^{\int_{t_0}^{t_2} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds} - 1 \quad (3.62)$$

und

$$\left| (p(z))^{-\frac{1}{2}} R'(z) \right| \leq e^{\int_{t_0}^{t_2} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| dy} - 1. \quad (3.63)$$

**Beweis.** Zu Beginn sei an die Bezeichnung  $\gamma_\nu = \nu \circ \gamma$  erinnert.

1. Wir zeigen, dass die Voraussetzungen von Satz 3.3 erfüllt sind. Dazu wählen wir  $\kappa : (t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto 2\theta\dot{\gamma}_\nu(t)$  sowie  $G : (t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \frac{1}{2\theta}g(\gamma(t))\dot{\gamma}_\nu(t)$ , wobei  $g$  wie in Satz 3.8 erklärt sei. Dabei ist  $\operatorname{Re}(\kappa)$  nach Voraussetzung monoton wachsend und  $G$  wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) &= \left( \frac{4p''(\gamma(t))p(\gamma(t)) - 5(p'(\gamma(t)))^2}{16(p(\gamma(t)))^{\frac{5}{2}}} + \frac{q(\gamma(t))}{(p(\gamma(t)))^{\frac{1}{2}}} \right) \dot{\gamma}(t) \\ &= g(\gamma(t))\nu'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = g(\gamma(t))\dot{\gamma}_\nu(t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

über dem Intervall  $(t_0, t_1]$  integrierbar. Satz 3.3 liefert somit eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $h : (t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ , welche neben der Differentialgleichung

$$\frac{d^2h}{dt^2}(t) + \left( 2\theta\dot{\gamma}_\nu(t) - \frac{\ddot{\gamma}_\nu(t)}{\dot{\gamma}_\nu(t)} \right) \frac{dh}{dt}(t) = g(\gamma(t))(\dot{\gamma}_\nu(t))^2(1 + h(t)), \quad t \in (t_0, t_1)$$

auch die Integraldarstellung

$$h(t) = \frac{1}{2\theta} \int_{t_0}^t \left( 1 - e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(s))} \right) g(\gamma(s))\dot{\gamma}_\nu(s)(1 + h(s)) ds, \quad t \in (t_0, t_1]$$

erfüllt sowie für  $t \in (t_0, t_1]$  den Abschätzungen

$$|h(t)| \leq e^{\int_{t_0}^t |g(\gamma(s))\dot{\gamma}_\nu(s)| ds} - 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{dh}{dt}(t) \right| \leq |\dot{\gamma}_\nu(t)| e^{\int_{t_0}^t |g(\gamma(s))\dot{\gamma}_\nu(s)| ds} - 1 \quad (3.65)$$

genügt. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die Ableitung von  $\gamma_\nu$  wegen der Regularität des



### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

Weges  $\gamma$  und der Nullstellenfreiheit der Funktion  $p$  nicht verschwindet. Weiterhin gilt nach [Satz 3.3](#) für die Ableitung von  $h$  die Darstellung

$$\frac{dh}{dt}(t) = \dot{\gamma}_\nu(t) \int_{t_0}^t e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(s))} g(\gamma(s)) \dot{\gamma}_\nu(s) (1 + h(s)) ds, \quad t \in (t_0, t_1].$$

Wir betrachten nun für ein  $\tau \in (t_0, t_1)$  in  $D$  das Anfangswertproblem

$$R'' + \left(2\theta\nu' - \frac{\nu''}{\nu'}\right) R' = g(\nu')^2(1 + R), \quad R(\gamma(\tau)) = h(\tau), \quad R'(\gamma(\tau)) = \frac{1}{\dot{\gamma}(\tau)} \frac{dh}{dt}(\tau).$$

Dafür liefert uns [Satz 2.15](#) eine eindeutige Lösung  $R$ . Nach [Lemma 3.12](#) erfüllt  $R \circ \gamma$  wie auch  $h$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2(R \circ \gamma)}{dt^2} + \left(2\theta\dot{\gamma}_\nu - \frac{\ddot{\gamma}_\nu}{\dot{\gamma}_\nu}\right) \frac{d(R \circ \gamma)}{dt} = (g \circ \gamma) \cdot (\dot{\gamma}_\nu)^2 (1 + (R \circ \gamma))$$

im Intervall  $(t_0, t_1)$ . Außerdem genügen  $h$  und  $R \circ \gamma$  offenbar derselben Anfangsbedingung im Punkt  $\tau$ . Damit stimmen beide Funktionen nach [Satz 2.11](#) in  $(t_0, t_1)$  und auf Grund der Stetigkeit von  $R \circ \gamma$  und  $h$  auch im Punkt  $t_1$  überein. Die Abschätzungen von  $h$  in [\(3.65\)](#) gelten somit auch für  $R \circ \gamma$  und wir erhalten mit [\(3.64\)](#) für  $t \in (t_0, t_1]$

$$|R(\gamma(t))| \leq e^{\int_{t_0}^t |\mathcal{E}(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s)| ds} - 1, \quad |R'(\gamma(t))| \leq |\nu'(\gamma(t))| e^{\int_{t_0}^t |\mathcal{E}(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s)| ds} - 1. \quad (3.66)$$

Die Integraldarstellungen der Funktion  $h$  und ihrer Ableitung übertragen sich auf  $R \circ \gamma$  und  $\frac{d(R \circ \gamma)}{dt}$ . Es gelten

$$R(\gamma(t)) = \frac{1}{2\theta} \int_{t_0}^t \left(1 - e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(s))}\right) g(\gamma(s)) \dot{\gamma}_\nu(s) (1 + R(\gamma(s))) ds, \quad t \in (t_0, t_1] \quad (3.67)$$

sowie

$$R'(\gamma(t)) = \nu'(\gamma(t)) \int_{t_0}^t e^{-2\theta(\gamma_\nu(t) - \gamma_\nu(s))} g(\gamma(s)) \dot{\gamma}_\nu(s) (1 + R(\gamma(s))) ds, \quad t \in (t_0, t_1]. \quad (3.68)$$

Des Weiteren erhalten wir mit [Satz 3.8](#) durch  $R$  eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung [\(3.60\)](#) in der Form

$$f(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \left( \int_{z_0}^z ((p(y))^{\frac{1}{2}} dy + c \right)} (1 + R(z)), \quad z \in D$$

und [\(3.61\)](#) ist gezeigt.

2. Es sei nun  $z \in D_\gamma^\theta$  und  $\delta : (t_0, t_2] \rightarrow D$  eine zugehörige Kette regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege wie in [Definition 3.13](#) mit  $\delta(t_2) = z$ . Wir definieren  $\delta_\nu := \nu \circ \delta$ . Nach Voraussetzung existiert eine endliche Zerlegung  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_2$  für  $n \in \mathbb{N}$  des Intervalls  $(t_0, t_2]$ , sodass für alle  $k = 0, \dots, n-1$  die Abbildungen  $\delta|_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}$  reguläre  $\mathcal{C}^2$ -Wege sind. Ohne Beschränkung

der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass  $\delta|_{(\tau_0, \tau_1]}$  mit  $\gamma|_{(\tau_0, \tau_1]}$  übereinstimmt. Wir zeigen induktiv, dass für alle  $t \in (\tau_0, \tau_{k+1}]$  und jedes  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  die Abschätzung (3.62) gilt. Für  $k = 0$  ist die Aussage offenbar wegen (3.66) erfüllt, da  $\delta$  und  $\gamma$  auf dem Intervall  $(\tau_0, \tau_1]$  übereinstimmen, wobei  $\tau_0 = t_0$  gewählt ist. Für beliebiges  $t \in (t_0, t_2] = (\tau_0, \tau_n]$  erhalten wir mit dem ersten Teil von Lemma 3.12

$$\begin{aligned} R(\delta(t)) &= R(\delta(\tau_1)) + \frac{R'(\delta(\tau_1))}{2\theta\nu'(\delta(\tau_1))} \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(\tau_1))}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_{\delta(\tau_1)}^{\delta(t)} \left(1 - e^{-2\theta(\nu(\delta(t)) - \nu(y))}\right) g(y)\nu'(y)(1 + R(y)) dy \\ &= R(\delta(\tau_1)) + \frac{R'(\delta(\tau_1))}{2\theta\nu'(\delta(\tau_1))} \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(\tau_1))}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_{\tau_1}^t \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(s))}\right) g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)(1 + R(\delta(s))) ds. \end{aligned}$$

Setzt man nun  $R(\delta(\tau_1)) = R(\gamma(\tau_1))$  und  $R'(\delta(\tau_1)) = R'(\gamma(\tau_1))$  aus (3.67) und (3.68) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} R(\delta(t)) &= \frac{1}{2\theta} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(\tau_1) - \delta_\nu(s))}\right) g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(t)(1 + R(\delta(s))) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(\tau_1))}\right) \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{-2\theta(\delta_\nu(\tau_1) - \delta_\nu(s))} g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)(1 + R(\delta(s))) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_{\tau_1}^t \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(s))}\right) g(\delta(s))\dot{\gamma}_\nu(s)(1 + R(\delta(s))) ds \\ &= \frac{1}{2\theta} \int_{\tau_0}^t \left(1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(s))}\right) g(\delta(s))\dot{\gamma}_\nu(s)(1 + R(\delta(s))) ds. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Entscheidend für die Abschätzung von  $R(\delta)$  ist das monotone Wachstum der Funktion  $\theta \operatorname{Re} \delta_\nu$ . Wir erhalten für  $s \leq t$  mit  $s, t \in (\tau_0, \tau_n]$

$$\left|e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(s))}\right| = e^{-2\theta(\operatorname{Re} \delta_\nu(t) - \operatorname{Re} \delta_\nu(s))} \leq 1 \quad \text{und} \quad \left|1 - e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(s))}\right| \leq 2.$$

Wählen wir nun  $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$  für  $k > 0$ , so können wir  $R$  folgendermaßen abschätzen,

$$\begin{aligned} |R(\delta(t))| + 1 &\leq 1 + \int_{t_0}^{\tau_k} |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)|(1 + |R(\delta(s))|) ds \\ &\quad + \int_{\tau_k}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)|(1 + |R(\delta(s))|) ds. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gronwallschen Ungleichung erhalten wir

$$|R(\delta(t)) + 1| \leq \left(1 + \int_{\tau_0}^{\tau_k} |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)|(1 + |R(\delta(s))|) ds\right) e^{\int_{\tau_k}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| ds}.$$

Hierbei benötigen wir die Voraussetzung an  $\delta$ , dass sich für  $k > 1$  die Einschränkung  $\delta|_{(\tau_k, \tau_{k+1})}$

### 3.2 Die WKB-Näherung für komplexe Variablen

stetig auf  $[\tau_k, \tau_{k+1}]$  fortsetzen lässt. Induktiv sehen wir nun

$$\begin{aligned} |R(\delta(t))| + 1 &\leq \left( 1 + \int_{\tau_0}^{\tau_k} |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| e^{\int_{t_0}^s |g(\delta(\tau))\dot{\delta}_\nu(\tau)| d\tau} ds \right) e^{\int_{\tau_k}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| ds} \\ &= e^{\int_{\tau_0}^{\tau_k} |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| ds} e^{\int_{\tau_k}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| ds} \\ &= e^{\int_{\tau_0}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| ds}. \end{aligned}$$

3. Die Abschätzung für die Ableitung ergibt sich folgendermaßen. Wir leiten in der Gleichung (3.69) nach  $t$  ab und erhalten

$$R'(\delta(t))\dot{\delta}(t) = \dot{\delta}_\nu(t) \int_{t_0}^t e^{-2\theta(\delta_\nu(t) - \delta_\nu(s))} g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)(1 + R(\delta(s))) ds.$$

Nutzen wir für  $t \in (t_0, t_2]$  die Beziehung  $\dot{\delta}_\nu(t) = \nu'(\delta(t))\dot{\delta}(t)$  und die eben bewiesene Abschätzung (3.62), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \frac{R'(\delta(t))}{\nu'(\delta(t))} \right| &\leq \int_{t_0}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| e^{\int_{t_0}^s |g(\delta(\tau))\dot{\delta}_\nu(\tau)| d\tau} ds \\ &= e^{\int_{t_0}^t |g(\delta(s))\dot{\delta}_\nu(s)| ds} - 1. \end{aligned} \quad \square$$

Im Unterschied zu den Sätzen 3.4 und 3.5 im reellen Fall ist die Anwendung von Satz 3.14 wesentlich komplizierter. Neben der äußerst starken Voraussetzung der Analytizität an die Funktionen  $p$  und  $q$ , gelten die Abschätzungen (3.62) und (3.63) nur für Punkte  $z \in D_\gamma^\theta$ . Dabei ist die zusammenhängende Menge  $D_\gamma^\theta$  im Allgemeinen eine Teilmenge des einfach zusammenhängenden Gebietes  $D$ . Die wesentliche Schwierigkeit besteht darin, einen geeigneten regulären  $C^2$ -Weg  $\gamma : (t_0, t_1] \rightarrow D$  zu finden, für den  $\theta \operatorname{Re}(\gamma)$  monoton wächst und die Menge  $D_\gamma^\theta$  interessante Bereiche abdeckt beziehungsweise hinreichend groß ist. Die Ungleichungen (3.62) und (3.63) liefern auf Grund von  $\lim_{t \searrow t_0} \int_{t_0}^t |\mathcal{E}(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)| ds = 0$  für die Funktion  $R$  und ihre Ableitung

$$\lim_{t \searrow t_0} R(\gamma(t)) = \lim_{t \searrow t_0} (p(\gamma(t)))^{-\frac{1}{4}} R'(\gamma(t)) = 0.$$

Insbesondere erhalten wir im Falle der Existenz von  $a := \lim_{t \searrow t_0} \gamma(t) \in D$  ( $a \neq \infty$ ), dass  $R$  und  $R'$  im Punkt  $a$  verschwinden. Da  $R$  die Differentialgleichung (3.54) erfüllt, sind  $R$  und  $f$  unter dieser Voraussetzung eindeutig durch den Anfangspunkt  $a$  bestimmt. Analysiert man den Beweis von Satz 3.14 (im zweiten Teil, induktiver Nachweis der Schranke für  $R$  entlang von  $\delta$ ), so wird klar, dass in diesem Fall auf die Bedingung (iv) in Definition 3.13 verzichtet werden kann. Im allgemeinen Fall hingegen ist diese Bedingung notwendig, wodurch die Lösung  $f$  vom Weg  $\gamma$  selbst abhängt.

Vernachlässigt man in der Darstellung (3.61) der Lösung  $f$  den Term  $R(z)$  so erhält man

mit

$$\hat{f}(z) = (p(z))^{-\frac{1}{4}} e^{\theta \left( \int_{z_0}^z (p(y))^{\frac{1}{2}} dy + c \right)}, \quad z \in D$$

als Verallgemeinerung der WKB-Näherung eine Approximation der tatsächlichen Lösung  $f$ . Wie gut diese die Lösung  $f$  approximiert hängt dabei vom Verhalten der Funktion  $R$  ab. Im letzten Kapitel werden wir mit der eben vorgestellten Methode Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung  $f'' = (p + q)f$  für Polynome  $p$  und  $q$  untersuchen.

## 4 Anwendung der WKB-Näherung auf Differentialgleichungen mit polynomiellen Koeffizienten

Es seien Polynome  $p$  vom Grad  $n \geq 3$  und  $q$  vom Grad höchstens  $m < \frac{n}{2} - 1$  der Form

$$p(z) = z^n, \quad q(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_0, \dots, a_m$ . Wir betrachten für den offenen Sektor

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \left| \arg(z) \right| < \frac{3\pi}{n+2} \right\} \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

die Differentialgleichung

$$f''(z) = (p(z) + q(z))f(z) = \left( z^n + \sum_{k=0}^m a_k z^k \right) f(z) \quad \text{für } z \in D.$$

Die Menge  $D$  ist ein sternförmiges Gebiet und somit einfach zusammenhängend. Unser Ziel ist mit Hilfe von [Satz 3.14](#) eine Lösung dieser Differentialgleichung mit speziellen Wachstumseigenschaften zu bestimmen. Dafür definieren wir die Transformationsabbildung  $\nu : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\nu(z) = \int_1^z y^{\frac{n}{2}} dy + \frac{2}{n+2} = \frac{2}{n+2} z^{\frac{n+2}{2}} \quad \text{für } z \in D.$$

Potenzen von  $z$  seien dabei über den Hauptzweig des Logarithmus  $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert. Insbesondere gilt somit

$$\nu(z) = \frac{2}{n+2} |z|^{\frac{n+2}{2}} e^{i \frac{n+2}{2} \arg(z)} \quad \text{für } z \in D.$$

Wir überdecken das Gebiet  $D$  mit den beiden offenen Menge

$$B_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\frac{\pi}{2(n+2)} < \arg(z) < \frac{3\pi}{n+2} \right\}$$

und

$$B_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\frac{3\pi}{n+2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2(n+2)} \right\}.$$

Dabei sind die Einschränkung  $\nu|_{B_1}$  und  $\nu|_{B_2}$  injektiv mit den Bildern

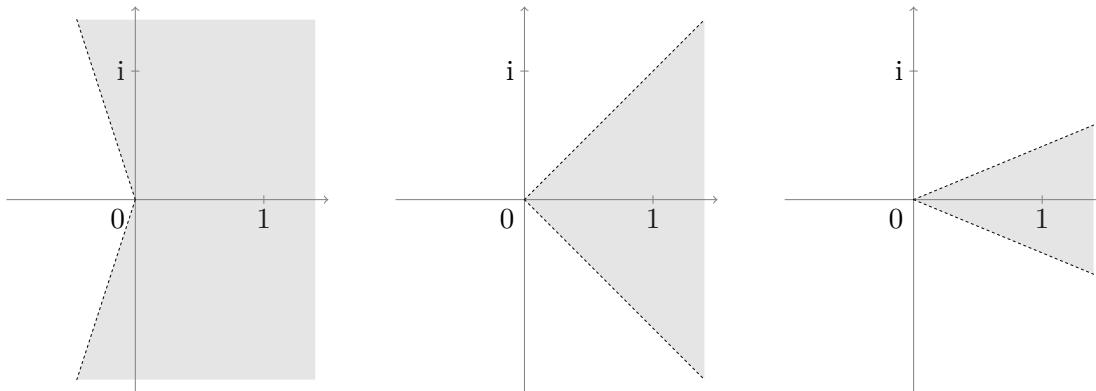


Abbildung 4.1: Der offene Sektor  $D$  am Beispiel für  $n = 3$ ,  $n = 10$  und  $n = 22$ .

$$\nu(B_1) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\zeta) < 0 \right\} \cup \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(\zeta) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

und

$$\nu(B_2) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\zeta) < 0 \right\} \cup \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \arg(\zeta) < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Wir betrachten den Weg  $\gamma : (-\infty, -1] \rightarrow D$ ,  $t \mapsto -t$ . Offenbar handelt es sich bei  $\gamma$  um einen regulären  $\mathcal{C}^2$ -Weg. Erneut verwenden wir die Bezeichnung  $\gamma_\nu := \nu \circ \gamma$ . Dabei ist die Abbildung  $-\operatorname{Re}(\gamma_\nu) = -\frac{2}{n+2}\gamma^{\frac{n+2}{2}}$  monoton wachsend. Wir wollen in Abhängigkeit der Position des Punktes  $z \in D$  eine Kette regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege  $\delta$  in  $D$  konstruieren, sodass für  $\delta_\nu := \nu \circ \delta$  die Funktion  $-\operatorname{Re}(\delta_\nu)$  eine monoton wachsende Funktion ist und  $\delta$  auf einem Teilintervall  $(-\infty, -\tau]$  für  $\tau > 1$  mit  $\gamma$  übereinstimmt. Dabei definieren wir  $\delta$  implizit über  $\delta_\nu$ , wobei wir fünf Fälle unterscheiden. Es sei jeweils  $\zeta = \nu(z)$ .

1. Für  $z \in (0, \infty) \subset B_1$  und  $\zeta \in (0, \infty) \subset \nu(B_1)$  sei

$$\delta_\nu : (-\infty, -\zeta] \rightarrow \nu(B_1), \quad t \mapsto -t.$$

2. Für  $z \in B_1$  mit  $0 < \arg(z) \leq \frac{2\pi}{n+2}$  erhalten wir  $0 < \arg(\zeta) \leq \pi$ . Wir wählen den Weg  $\delta_\nu : (-\infty, -|\zeta| + \arg(\zeta)] \rightarrow \nu(B_1)$  mit

$$\delta_\nu(t) = \begin{cases} -t, & \text{falls } -\infty < t < -|\zeta|, \\ |\zeta|e^{i(t+|\zeta|)}, & \text{falls } -|\zeta| \leq t \leq -|\zeta| + \arg(\zeta). \end{cases}$$

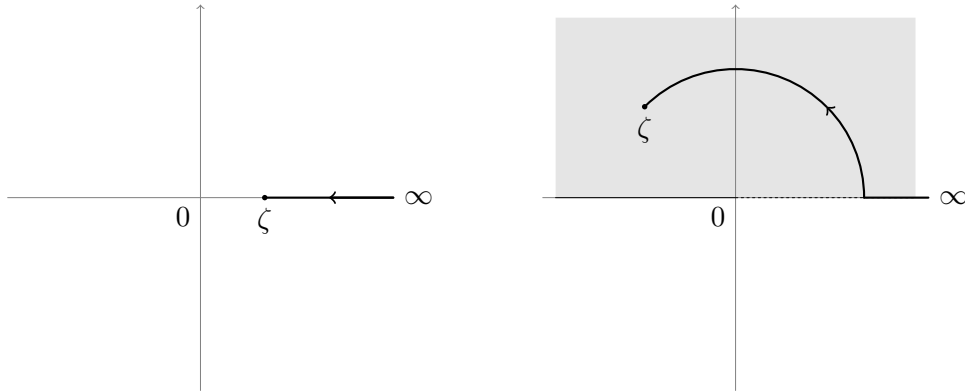


Abbildung 4.2: Der Weg  $\delta_\nu$  in Abhängigkeit des Punktes  $\zeta = \nu(z)$  für die Fälle 1 und 2.

3. Für  $z \in B_1$  mit  $\frac{2\pi}{n+2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{n+2}$  folgt  $-\pi < \arg(\zeta) < -\frac{\pi}{2}$  und wir definieren  $\delta_\nu : (-\infty, \operatorname{Re}(\zeta) + \pi - \operatorname{Im}(\zeta)] \rightarrow \nu(B_1)$ ,

$$\delta_\nu(t) = \begin{cases} -t, & \text{falls } -\infty < t < \operatorname{Re}(\zeta), \\ -\operatorname{Re}(\zeta)e^{i(t-\operatorname{Re}(\zeta))}, & \text{falls } \operatorname{Re}(\zeta) \leq t < \operatorname{Re}(\zeta) + \pi, \\ \operatorname{Re}(\zeta) - i(t - \operatorname{Re}(\zeta) - \pi), & \text{falls } \operatorname{Re}(\zeta) + \pi \leq t \leq \operatorname{Re}(\zeta) + \pi - \operatorname{Im}(\zeta). \end{cases}$$

4. Für  $z \in B_2$  mit  $-\frac{2\pi}{n+2} < \arg(z) < 0$  und folglich  $-\pi < \arg(\zeta) < 0$  sei der Weg  $\delta_\nu : (-\infty, -|\zeta| - \arg(\zeta)] \rightarrow \nu(B_2)$  mit

$$\delta_\nu(t) = \begin{cases} -t, & \text{falls } -\infty < t < -|\zeta|, \\ |\zeta|e^{-i(t+|\zeta|)}, & \text{falls } -|\zeta| \leq t \leq -|\zeta| - \arg(\zeta). \end{cases}$$

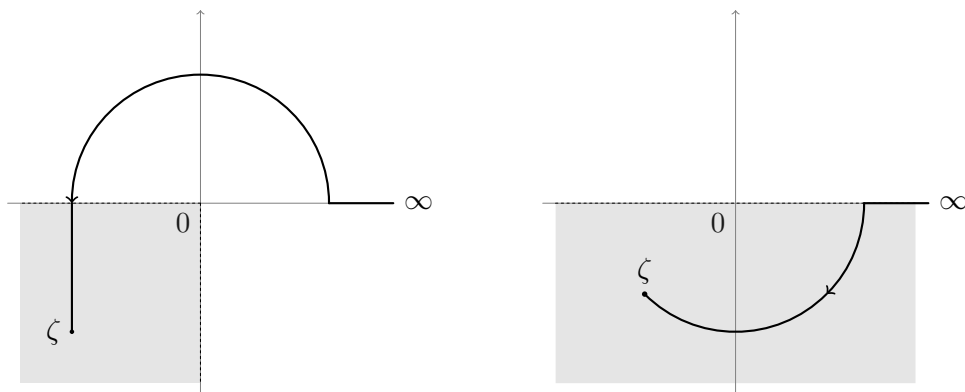


Abbildung 4.3: Der Weg  $\delta_\nu$  in Abhängigkeit des Punktes  $\zeta = \nu(z)$  für die Fälle 3 und 4.

5. Für  $z \in B_2$  mit  $-\frac{3\pi}{n+2} < \arg(z) \leq -\frac{2\pi}{n+2}$  und  $\frac{\pi}{2} < \arg(\zeta) \leq \pi$  definieren wir den Weg

$\delta_\nu : (-\infty, \operatorname{Re}(\zeta) + \pi + \operatorname{Im}(\zeta)] \rightarrow \nu(B_2)$  mit

$$\delta_\nu(t) = \begin{cases} -t, & \text{falls } -\infty < t < \operatorname{Re}(\zeta), \\ -\operatorname{Re}(\zeta)e^{-i(t-\operatorname{Re}(\zeta))}, & \text{falls } \operatorname{Re}(\zeta) \leq t < \operatorname{Re}(\zeta) + \pi, \\ \operatorname{Re}(\zeta) + i(t - \operatorname{Re}(\zeta) - \pi), & \text{falls } \operatorname{Re}(\zeta) + \pi \leq t \leq \operatorname{Re}(\zeta) + \pi + \operatorname{Im}(\zeta). \end{cases}$$

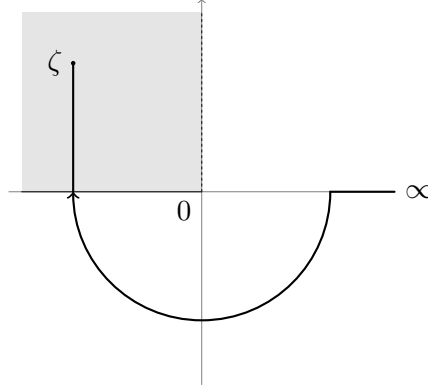


Abbildung 4.4: Der Weg  $\delta_\nu$  in Abhängigkeit des Punktes  $\zeta = \nu(z)$  im Fall 5.

Da die oben konstruierten Wege jeweils komplett in  $\nu(B_1)$  oder  $\nu(B_2)$  verlaufen, sind in den ersten drei Fällen durch  $\delta := (\nu|_{B_1})^{-1} \circ \delta_\nu$  und in beiden letzten durch  $\delta := (\nu|_{B_2})^{-1} \circ \delta_\nu$  jeweils Wege definiert. Dabei bezeichnen wir generisch mit  $(-\infty, t_1]$  den Definitionsbereich des Weges  $\delta$ . Weil  $\delta_\nu$  jeweils eine Kette regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege ist, folgt aus der Analytizität der Abbildung  $\nu$  und  $\nu'(z) = z^{\frac{n}{2}} \neq 0$  für  $z \in D$ , dass der entsprechende Weg  $\delta$  eine Kette regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege in  $D$  ist. Es gelten zwischen  $\delta$  und  $\delta_\nu$  für  $(-\infty, t_1]$  die Beziehungen

$$\delta_\nu(t) = \nu(\delta(t)) = \frac{2}{n+2}(\delta(t))^{\frac{n+2}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{\delta}_\nu(t) = \nu'(\delta(t))\dot{\delta}(t) = (\delta(t))^{\frac{n}{2}}\dot{\delta}(t). \quad (4.1)$$

Für jedes  $z \in D$  gilt genau einer der Fälle 1 bis 5. Somit existiert nach Konstruktion eine Kette  $\delta : (-\infty, t_1] \rightarrow D$  regulärer  $\mathcal{C}^2$ -Wege in  $D$  mit Endpunkt  $\delta(t_1) = z$ , für die  $-\operatorname{Re} \delta_\nu$  eine monoton wachsende Funktion darstellt und die mit dem Weg  $\gamma$  im Intervall  $(-\infty, -\tau)$  für ein  $\tau > 1$  übereinstimmen.

Wir betrachten die Funktion  $\mathcal{E} : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\mathcal{E}(z) = \frac{4p''(z)p(z) - 5(p'(z))^2}{16(p(z))^{\frac{5}{2}}} + \frac{q(z)}{(p(z))^{\frac{1}{2}}} = -\frac{n^2 + 4n}{16}z^{-\frac{n+4}{2}} + \sum_{k=0}^m a_k z^{\frac{2k-n}{2}}, \quad z \in D.$$

Dabei gilt wegen  $2(m+1) < n$  für  $k \in \{0, \dots, m\}$  die Abschätzung  $2k - n < -2$  wodurch  $\mathcal{E}$



entlang des Weges  $\gamma$  integrierbar ist,

$$\int_{-\infty}^1 |\mathcal{E}(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)| ds \leq \frac{n^2 + 4n}{16} \int_{-\infty}^1 |s|^{-\frac{n+4}{2}} ds + \sum_{k=0}^m |a_k| \int_{-\infty}^1 |s|^{\frac{2k-n}{2}} ds < \infty.$$

**Satz 3.14** liefert nun in  $D$  eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung  $f'' = (p + q)f$  mit

$$f(z) = z^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{2}{n+2} \left( z^{\frac{n+2}{2}} \right)} (1 + R(z)), \quad z \in D$$

wobei für die analytische Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{C}$  die Abschätzungen

$$|R(z)| \leq e^{\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds} - 1 \quad \text{und} \quad \left| z^{-\frac{n}{2}} R'(z) \right| \leq e^{\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds} - 1$$

für  $z \in D_\gamma^{-1} = D$  erfüllt sind, wobei  $\delta$  entsprechend der Fälle 1 bis 5 konstruiert ist. Unter Verwendung der Beziehungen (4.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds &\leq \int_{-\infty}^{t_1} \left( \frac{n^2 + 4n}{16} |\delta(s)|^{-\frac{n+4}{2}} + \sum_{k=0}^m |a_k| |\delta(s)|^{\frac{2k-n}{2}} \right) |\dot{\delta}(s)| ds \\ &= \frac{n^2 + 4n}{16} \int_{-\infty}^{t_1} \left( \frac{n+2}{2} |\delta_\nu(s)| \right)^{-2} |\dot{\delta}_\nu(s)| ds \\ &\quad + \sum_{k=0}^m |a_k| \int_{-\infty}^{t_1} \left( \frac{n+2}{2} |\delta_\nu(s)| \right)^{\frac{2(k-n)}{n+2}} |\dot{\delta}_\nu(s)| ds \end{aligned} \quad (4.2)$$

Wir definieren abkürzend die nichtnegativen Konstanten

$$c_0 := \frac{n^2 + 4n}{16} \left( \frac{n+2}{2} \right)^{-2} \quad \text{und} \quad \tilde{a}_k := |a_k| \left( \frac{n+2}{2} \right)^{\frac{2(k-n)}{n+2}}, \quad k = 0, \dots, m.$$

Wegen  $2(m+1) < n$  gilt  $\frac{2(k-n)}{n+2} < -1$  für  $k \in \{0, \dots, m\}$ . Exemplarisch erhalten wir mittels (4.2) für den Fall 3 mit  $t_1 = \operatorname{Re}(\zeta) + \pi - \operatorname{Im}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds &\leq \int_{-\infty}^{\operatorname{Re}(\zeta)} c_0 |s|^{-2} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k |s|^{\frac{2(k-n)}{n+2}} ds \\ &\quad + \int_{\operatorname{Re}(\zeta)}^{\operatorname{Re}(\zeta)+\pi} c_0 |\operatorname{Re}(\zeta)|^{-1} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k |\operatorname{Re}(\zeta)|^{\frac{2k+2-n}{n+2}} ds \\ &\quad + \int_{\operatorname{Re}(\zeta)+\pi}^{\operatorname{Re}(\zeta)+\pi-\operatorname{Im}(\zeta)} c_0 |\operatorname{Re}(\zeta)|^{-2} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k |\operatorname{Re}(\zeta)|^{\frac{2(k-n)}{n+2}} ds. \end{aligned}$$

Dabei nutzen wir die Tatsache, dass für eine beliebige reelle Zahl  $b$  die Ungleichung  $|\operatorname{Re} \zeta + ib| \geq$

$|\operatorname{Re} \zeta|$  gilt. Wir erhalten weiterhin

$$\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds \leq c_0 \left( (1 + \pi) |\operatorname{Re}(\zeta)|^{-1} + |\operatorname{Im}(\zeta)| |\operatorname{Re}(\zeta)|^{-2} \right) + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k \left( (1 + \pi) |\operatorname{Re} \zeta|^{\frac{2k+2-n}{n+2}} + |\operatorname{Im} \zeta| |\operatorname{Re} \zeta|^{\frac{2(k-n)}{n+2}} \right). \quad (4.3)$$

Im fünften Fall gilt analog für  $t_1 = \operatorname{Re}(\zeta) + \pi + \operatorname{Im}(\zeta)$  die Abschätzung (4.3). Der erste Fall liefert für  $t_1 = -|\zeta|$

$$\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds \leq c_0 |\zeta|^{-1} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k |\zeta|^{\frac{2k+2-n}{n+2}}.$$

In Fall 2 mit  $t_1 = -|\zeta| + \arg(\zeta)$  und im Fall 4 mit  $t_1 = -|\zeta| - \arg(\zeta)$  erhalten wir die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds \leq c_0 (1 + \pi) |\zeta|^{-1} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k (1 + \pi) |\zeta|^{\frac{2k+2-n}{n+2}}.$$

Mit Hilfe dieser Vorbereitungen können wir nun folgende Aussage beweisen.

**Satz 4.1** *Es sei für eine natürliche Zahl  $n \geq 3$  das Gebiet*

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(z)| < \frac{3\pi}{n+2} \right\}$$

*gegeben. Des Weiteren seien  $m < \frac{n}{2} - 1$  eine nichtnegative, ganze Zahl und  $a_0, \dots, a_m$  komplexe Zahlen. Dann existiert eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung*

$$f''(z) = \left( z^n + \sum_{k=0}^m a_k z^k \right) f(z), \quad z \in D \quad (4.4)$$

*in der Form*

$$f(z) = z^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{2}{n+2} \left( z^{\frac{n+2}{2}} \right)} (1 + R(z)), \quad z \in D \quad (4.5)$$

*mit einer analytischen Funktion  $R : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dabei erfüllt  $R$  für festes  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon < \frac{\pi}{n+2}$  und den nichtnegativen Konstanten*

$$b = \frac{n^2 + 4n}{8(n+2) \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)} \left( 1 + \pi + \frac{1}{\sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)} \right)$$

sowie

$$b_k = |a_k| \left( \frac{n+2}{2} \right)^{-\frac{2}{n+2}} \left( \sin \left( \frac{n+2}{2} \varepsilon \right) \right)^{\frac{2k+2-n}{n+2}} \left( 1 + \pi + \frac{1}{\sin \left( \frac{n+2}{2} \varepsilon \right)} \right), \quad k = 0, \dots, m$$

für alle  $z \in D$  mit  $|\arg(z)| \leq \frac{3\pi}{n+2} - \varepsilon$  die Ungleichungen

$$|R(z)| \leq e^{\left( b|z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m b_k |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1 \quad (4.6)$$

und

$$\left| z^{-\frac{n}{2}} R'(z) \right| \leq e^{\left( b|z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m b_k |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1. \quad (4.7)$$

**Beweis.** Für  $z \in D$  seien  $\zeta = \nu(z)$  und  $\delta(t_1) = z$  entsprechend der Fälle 1 bis 5. Wir schauen zuerst auf die Ungleichungskette (4.3). Unter der zusätzlichen Voraussetzung  $|\arg(z)| \leq \frac{3\pi}{\alpha+2} - \varepsilon$  gilt im dritten Fall  $\frac{2\pi}{n+2} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{n+2} - \varepsilon$  und  $-\pi < \arg(\zeta) \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{n+2}{2}\varepsilon$ . Somit kann man den Realteil von  $\zeta$  durch  $|\operatorname{Re} \zeta| \geq |\zeta| \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)$  abschätzen.

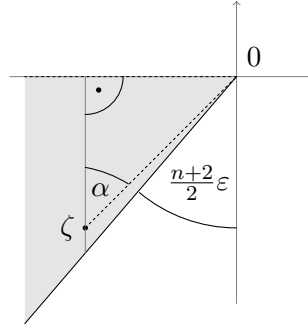


Abbildung 4.5: Nach den Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck entspricht der  $\sin(\alpha)$  dem Quotienten aus der Gegenkathete  $|\operatorname{Re}(\zeta)|$  und der Hypotenuse  $|\zeta|$ . Dabei ist  $\frac{\pi}{2} > \alpha = -\frac{\pi}{2} - \arg(\zeta) > \frac{n+2}{\pi}\varepsilon$ , womit  $\sin(\alpha) \geq \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)$  gilt.

Weiterhin gilt  $|\operatorname{Im} \zeta| \leq |\zeta|$ . Wir erhalten im Fall 3

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds &\leq c_0 \left( (1 + \pi) \left( |\zeta| \sin \left( \frac{n+2}{2} \varepsilon \right) \right)^{-1} + |\zeta| \left( |\zeta| \sin \left( \frac{n+2}{2} \varepsilon \right) \right)^{-2} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k (1 + \pi) \left( |\zeta| \sin \left( \frac{n+2}{2} \varepsilon \right) \right)^{\frac{2k+2-n}{n+2}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k |\zeta| \left( |\zeta| \sin \left( \frac{n+2}{2} \varepsilon \right) \right)^{\frac{2(k-n)}{n+2}}. \end{aligned}$$

4 Anwendung der WKB-Näherung auf Differentialgleichungen mit polynomiellen  
Koeffizienten

Durch Einsetzen von  $|\zeta| = \frac{2}{n+2}|z|^{\frac{n+2}{2}}$  ergibt sich daraus im dritten Fall die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds &\leq \frac{c_0(n+2)}{2 \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)} \left(1 + \pi + \frac{1}{\sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)}\right) |z|^{-\frac{n+2}{2}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k \left(\frac{2 \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)}{n+2}\right)^{\frac{2k+2-n}{n+2}} \left(1 + \pi + \frac{1}{\sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)}\right) |z|^{\frac{2k+2-n}{2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für den fünften Fall mit  $-\frac{3\pi}{n+2} < \arg(z) \leq -\frac{2\pi}{n+2}$  gilt unter Einschränkung  $|\arg(z)| \leq \frac{2\pi}{n+2} - \varepsilon$  für  $\zeta = \nu(z)$  die Beziehung  $\frac{\pi}{2} + \frac{n+2}{2}\varepsilon \leq \arg(\zeta) \leq \pi$ . Analog zur obigen Überlegung können wir deshalb  $|\operatorname{Re}(\zeta)|$  durch  $|\zeta| \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)$  nach unten abschätzen. Somit erhalten im fünften Fall für  $\delta(t_1) = z$  ebenfalls die Ungleichung (4.8). Durch Einsetzen von  $|\zeta| = \frac{2}{n+2}|z|^{\frac{n+2}{2}}$  sieht man direkt, dass im Fall 1

$$\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds \leq \frac{c_0(n+2)}{2} |z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{2k+2-n}{n+2}} |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \quad (4.9)$$

sowie in den Fällen 2 und 4

$$\int_{-\infty}^{t_1} |\mathcal{E}(\delta(s))\dot{\delta}(s)| ds \leq \frac{c_0(n+2)(1+\pi)}{2} |z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k (1+\pi) \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{2k+2-n}{n+2}} |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \quad (4.10)$$

gelten. Die nichtnegativen Konstanten  $b, b_0, \dots, b_m$  ergeben sich als die Maxima der Vorfaktoren der jeweiligen Potenzen in den Ungleichungen (4.8), (4.9) und (4.10). Dabei ist zu beachten, dass auf Grund der Wahl  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{n+2}$  stets

$$0 < \sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right) < 1 \quad \text{und somit} \quad 1 < \left(\sin\left(\frac{n+2}{2}\varepsilon\right)\right)^{-\alpha} < \infty \quad \text{für } \alpha > 1$$

gilt. Deshalb können wir die Koeffizienten aus (4.8) wählen. □

Wir erinnern in dieser Stelle an die Landau-Notation  $\mathcal{O}$  für asymptotische obere Schranken von Funktionen. Ist für zwei Funktion  $f$  und  $g$  sowie einen Punkt  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  der Limes superior

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|}$$

beschränkt, so schreiben wir

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \quad \text{für } z \rightarrow z_0.$$

**Bemerkung 4.2** In Satz 4.1 erkennt man sehr schön, dass für  $k \in \{0, \dots, m\}$  und festes

$\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{n+2})$  der Koeffizient  $b_k$  nur linear vom Absolutbetrag  $|a_k|$  abhängt. Des Weiteren erkennt man in (4.8), dass die Koeffizienten  $b_k$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  die Ordnung

$$\mathcal{O}\left(\sin\left(\frac{\alpha+2}{2}\varepsilon\right)^{\frac{2(k-\alpha)}{\alpha+2}}\right) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{2(k-\alpha)}{\alpha+2}}\right) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

besitzen. Der Koeffizient  $b$  hingegen ist von den komplexen Zahlen  $a_0, \dots, a_m$  unabhängig, besitzt aber als abhängige Größe von  $\varepsilon$  die Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Somit existieren für festes  $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{n+2})$  und eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^{m+1}$  nichtnegative Koeffizienten  $b, b_0, \dots, b_m$ , sodass es für jeden Vektor  $(a_0, \dots, a_m)^T \in K$  eine Lösung der Differentialgleichung (4.4) der Form (4.5) gibt, wobei die Funktion  $R$  die Abschätzungen (4.6) und (4.7) erfüllt.

Abschließend wollen wir neben der Differentialgleichung (4.4) allgemeiner für  $\alpha \in (0, \infty)$  die Differentialgleichung

$$f''(z) = \left(\alpha z^n + \sum_{k=0}^m a_k z^k\right) f(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

betrachten, wobei  $n \geq 3$  eine natürliche Zahl,  $m < \frac{n}{2} - 1$  eine nichtnegative, ganze Zahl und  $a_0, \dots, a_m$  beliebige komplexe Zahlen sind. Es sei weiterhin  $D$  der offene Sektor komplexer Zahlen  $z \neq 0$  mit  $|\arg(z)| < \frac{3\pi}{n+2}$ . Außerdem betrachten wir einen Teilsektor von  $D$ ,

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(z)| < \frac{\pi}{n+2} \right\} \subset D.$$

Mit Hilfe von  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n+2}}$ , einem Element der Einheitskreislinie, können wir die Sektoren  $D$  und  $S$  bezüglich des Nullpunktes drehen. Es seien für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$

$$D_\ell := \omega^\ell D = \left\{ \omega^\ell z \mid z \in D \right\} \quad \text{und} \quad S_\ell := \omega^\ell S.$$

Analog definieren wir für  $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{n+2})$  die Sektoren

$$D_\varepsilon := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(z)| \leq \frac{3\pi}{n+2} - \varepsilon \right\}, \quad S_\varepsilon := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{n+2} - \varepsilon \right\}$$

und  $D_{\ell,\varepsilon} := \omega^\ell D_\varepsilon$  sowie  $S_{\ell,\varepsilon} := \omega^\ell S_\varepsilon$  für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$ . Aus Gründen der Vereinfachung in der Indizierung definieren  $S_{-1,\varepsilon} := S_{n+1,\varepsilon}$  sowie  $S_{n+2,\varepsilon} := S_{0,\varepsilon}$ . Die Halbgerade zwischen den Sektoren  $S_\ell$  und  $S_{\ell+1}$  für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$  bezeichnen wir mit  $G_\ell$ ,

$$G_\ell := \left\{ \omega^\ell z \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } \arg(z) = \frac{\pi}{n+2} \right\}, \quad \ell \in \{0, \dots, n+1\}.$$

Mit  $G_{-1}$  sei wiederum die Halbgerade  $G_{n+1}$  bezeichnet. In der Literatur (vergleiche [6, 7, 8])

4 Anwendung der WKB-Näherung auf Differentialgleichungen mit polynomiellen  
Koeffizienten

sind für die Sektoren  $S_0, \dots, S_{n+1}$  die Bezeichnung *Stokes wedges* und für die Halbgeraden  $G_0, \dots, G_{n+1}$  *Stokes lines* gebräuchlich.

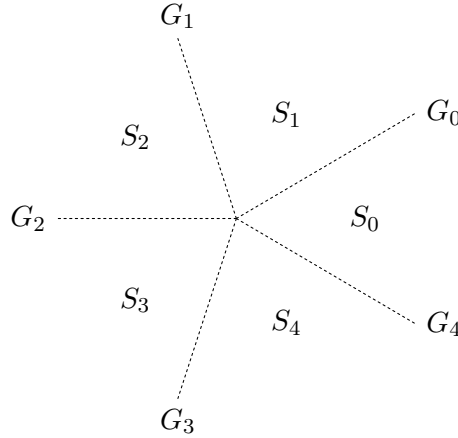


Abbildung 4.6: Die offenen Sektoren  $S_0, \dots, S_4$  und trennenden Halbgeraden  $G_0, \dots, G_4$  im Fall  $n = 3$ .

**Satz 4.3** *Es seien eine natürliche Zahl  $n \geq 3$ , eine nichtnegative, ganze Zahl  $m < \frac{n}{2} - 1$  sowie  $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{n+2})$  und  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n+2}}$ . Für Zahlen  $\alpha \in (0, \infty)$  und  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  existieren für die Differentialgleichung*

$$f''(z) = \left( \alpha z^n + \sum_{k=0}^m a_k z^k \right) f(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.11)$$

*Lösungen  $f_0, \dots, f_{n+1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$  die ganze Funktion  $f_\ell$  in  $D_\ell$  der Form*

$$f_\ell(z) = \left( \omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \right)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{2}{n+2} \left( \sqrt{\alpha} (\omega^{-\ell} z)^{\frac{n+2}{2}} \right)} (1 + R_\ell(z)), \quad z \in D_\ell \quad (4.12)$$

*mit einer analytischen Funktion  $R_\ell : D_\ell \rightarrow \mathbb{C}$  genügt. Es existieren weiter nichtnegative Konstanten  $b, b_0, \dots, b_m$  sodass für jedes  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$  die Funktion  $R_\ell$  die Abschätzung*

$$|R_\ell(z)| \leq e^{\left( b|z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m b_k |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1$$

und

$$\left| \alpha^{-\frac{n+1}{2(n+2)}} z^{-\frac{n}{2}} R'_\ell(z) \right| \leq e^{\left( b|z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m b_k |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1$$

für  $z \in D_{\ell, \varepsilon}$  erfüllt. Weiterhin gilt für jedes  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$

(i) die Funktion  $f_\ell$  besitzt die asymptotische Ordnung

$$f_\ell(z) = \mathcal{O} \left( |z|^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}}{n+2} \operatorname{Re} \left( (\omega^{-1}z)^{\frac{n+2}{2}} \right)} \right) \quad \text{für } z \rightarrow \infty \text{ mit } z \in D_{\ell,\varepsilon},$$

(ii)  $|f_\ell(z)|$  konvergiert exponentiell gegen  $\infty$  für  $z \rightarrow \infty$  mit  $z \in S_{\ell-1,\varepsilon} \cup S_{\ell+1,\varepsilon}$ ,

(iii)  $|f_\ell(z)|$  konvergiert exponentiell gegen 0 für  $z \rightarrow \infty$  mit  $z \in S_\ell$ ,

(iv)  $|f_\ell(z)|$  konvergiert gegen 0 für  $z \rightarrow \infty$  mit  $z \in G_\ell \cup G_{\ell-1}$ .

Jeweils ein Paar von Lösungen  $\{f_0, f_1\}, \dots, \{f_n, f_{n+1}\}, \{f_{n+1}, f_0\}$  bildet eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung (4.11).

**Beweis.** 1. Für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$  betrachten wir die Differentialgleichung

$$g_\ell''(z) = \left( z^n + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_{k,\ell} z^k \right) g_\ell(z) \quad (4.13)$$

für  $z \in D$  mit den Koeffizienten

$$\tilde{a}_{k,\ell} := a_k \alpha^{-\frac{k+2}{n+2}} \omega^{k\ell+2\ell}, \quad k = 0, \dots, n+1.$$

Nach Satz 4.1 und Bemerkung 4.2 existieren nichtnegative Konstanten  $\tilde{b}, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_m$  und jedes  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$  eine Lösungen  $g_\ell : D \rightarrow \mathbb{C}$  der Differentialgleichung (4.13) dergestalt

$$g_\ell(z) = z^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{2}{n+2} \left( z^{\frac{n+2}{2}} \right)} (1 + \tilde{R}_\ell(z)), \quad z \in D,$$

wobei  $R_\ell : D \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch ist und die Ungleichungen

$$|\tilde{R}_\ell(z)| \leq e^{\left( \tilde{b}|z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m \tilde{b}_k |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1, \quad z \in D_\varepsilon$$

sowie

$$\left| z^{-\frac{n}{2}} \tilde{R}'_\ell(z) \right| \leq e^{\left( \tilde{b}|z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m \tilde{b}_k |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1, \quad z \in D_\varepsilon$$

erfüllt.

Da die Abbildung  $z \mapsto z^n + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_{k,\ell} z^k$  in  $\mathbb{C}$  analytisch ist, kann man die Lösungen  $g_\ell$  nach Satz 2.15 eindeutig auf die gesamte komplexe Zahlenebene fortsetzen, wobei die Fortsetzungen die Differentialgleichung (4.13) für alle  $z \in \mathbb{C}$  erfüllen und ganze Funktionen sind. Wir bezeichnen diese Fortsetzungen ebenfalls mit  $g_\ell$ . Wir definieren für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$

4 Anwendung der WKB-Näherung auf Differentialgleichungen mit polynomiellen  
Koeffizienten

die analytische Funktion  $f_\ell : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f_\ell(z) := g_\ell \left( \omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Es gilt für  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f_\ell''(z) &= \omega^{-2\ell} \alpha^{\frac{2}{n+2}} g_\ell''(z) = \omega^{-2\ell} \alpha^{\frac{2}{n+2}} \left( \omega^{-\ell n} \alpha^{\frac{n}{n+2}} z^n + \sum_{k=0}^m \tilde{a}_{k,\ell} \omega^{-k\ell} \alpha^{\frac{k}{n+2}} z^k \right) g_\ell(z) \\ &= \left( \alpha z^n + \sum_{k=0}^m a_k z^k \right) f_\ell(z). \end{aligned}$$

Für  $z \in D_\ell$  liegt ferner  $\omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \in D$ . Somit erfüllt die analytische Funktion  $R_\ell : D_\ell \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$R_\ell(z) := \tilde{R}_\ell \left( \omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \right), \quad z \in D_\ell$$

die Beziehung (4.12). Genauso liegt für  $z \in D_{\ell,\varepsilon}$  die Zahl  $\omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \in D_\varepsilon$ . Damit erfüllt die Funktion  $R_\ell$  für  $z \in D_{\ell,\varepsilon}$  die Ungleichungen

$$|R_\ell(z)| = \left| \tilde{R}_\ell \left( \omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \right) \right| \leq e^{\left( \frac{\tilde{b}}{\sqrt{\alpha}} |z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m \tilde{b}_k \alpha^{\frac{2k+2-n}{2(n+2)}} |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1$$

und

$$\begin{aligned} \left| \alpha^{-\frac{n+1}{2(n+2)}} z^{-\frac{n}{2}} R_\ell'(z) \right| &= \left| \left( \omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \right)^{-\frac{n}{2}} \tilde{R}_\ell' \left( \omega^{-\ell} \alpha^{\frac{1}{n+2}} z \right) \right| \\ &\leq e^{\left( \frac{\tilde{b}}{\sqrt{\alpha}} |z|^{-\frac{n+2}{2}} + \sum_{k=0}^m \tilde{b}_k \alpha^{\frac{2k+2-n}{2(n+2)}} |z|^{\frac{2k+2-n}{2}} \right)} - 1. \end{aligned}$$

2. Wegen  $2(m+1) < n$  gilt für  $z \rightarrow \infty$  innerhalb des Sektors  $D_{\ell,\varepsilon}$  für  $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$

$$|R_\ell(z)| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad |1 + R_\ell(z)| \rightarrow 1.$$

Für  $z \in D_{\ell,\varepsilon} \subset D_\ell$  erhalten wir

$$|f_\ell(z)| = |\alpha|^{-\frac{n}{4(n+2)}} |z|^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{2}{n+2} \sqrt{\alpha} \operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} \right)} |1 + R_\ell(z)|.$$

Es sei nun speziell  $y \in S$  und  $z = \omega^\ell y \in S_\ell$ . Dann gilt

$$\operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} \right) = \operatorname{Re} \left( y^{\frac{n+2}{2}} \right) = |y|^{\frac{n+2}{2}} \cos \left( \frac{(n+2) \arg(y)}{2} \right).$$

Da  $|\arg(y)| < \frac{\pi}{n+2}$  gilt, erhalten wir  $\operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} \right) > 0$ . Somit konvergiert  $|f_\ell(z)|$  exponentiell gegen 0 für  $z \rightarrow \infty$  mit  $z \in S_\ell$ .



Für  $z = \omega^{\ell+1}y \in S_{\ell+1,\varepsilon} \subset D_{\ell,\varepsilon}$  mit  $y \in S_\varepsilon$  erhalten wir mit  $0 < |\arg(y)| \leq \frac{\pi}{n+2} - \varepsilon < \frac{\pi}{n+2}$  und  $\arg(\omega) = \frac{2\pi}{n+2}$

$$\operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} \right) = \operatorname{Re} \left( (\omega y)^{\frac{n+2}{2}} \right) = |y|^{\frac{n+2}{2}} \cos \left( \frac{(n+2) \arg(y)}{2} + \pi \right) < 0.$$

Analog gilt für  $z = \omega^{\ell-1}y \in S_{\ell-1,\varepsilon} \subset D_{\ell,\varepsilon}$  mit  $y \in S_\varepsilon$

$$\operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} \right) = \operatorname{Re} \left( (\omega^{-1}y)^{\frac{n+2}{2}} \right) = |y|^{\frac{n+2}{2}} \cos \left( \frac{(n+2) \arg(y)}{2} - \pi \right) < 0.$$

Somit konvergiert  $|f(z)|$  exponentiell gegen  $\infty$  für  $z \rightarrow \infty$  mit  $z \in S_{\ell-1,\varepsilon} \cup S_{\ell+1,\varepsilon}$ .

Für  $z = \omega^\ell y \in G_\ell \subset D_{\ell,\varepsilon}$  und  $\xi = \omega^{\ell-1}y \in G_{\ell-1} \subset D_{\ell,\varepsilon}$  mit  $\arg(y) = \frac{\pi}{n+2}$  erhalten wir

$$\operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} z^{\frac{n+2}{2}} \right) = \operatorname{Re} \left( (y)^{\frac{n+2}{2}} \right) = |y|^{\frac{n+2}{2}} \cos \left( \frac{(n+2) \arg(y)}{2} \right) = 0$$

und

$$\operatorname{Re} \left( \omega^{-\frac{\ell(n+2)}{2}} \xi^{\frac{n+2}{2}} \right) = \operatorname{Re} \left( (\omega^{-1}y)^{\frac{n+2}{2}} \right) = |y|^{\frac{n+2}{2}} \cos \left( \frac{(n+2) \arg(y)}{2} - \pi \right) = 0.$$

Damit sieht man die Konvergenz von  $|f(z)|$  gegen 0 für  $z \rightarrow \infty$  mit  $z \in G_\ell \cup G_{\ell-1}$ .

Aufgrund des Wachstumsverhalten von  $f_1$  und  $f_2$  in den Sektoren  $S_{1,\varepsilon}$  und  $S_{2,\varepsilon}$  folgt die lineare Unabhängigkeit beider Lösungen. Analog sieht man, dass die Paare  $\{f_2, f_3\}, \dots, \{f_{n+1}, f_0\}$  Basen des Lösungsraumes der Differentialgleichung (4.11) darstellen.  $\square$



## Symbolverzeichnis

$\mathcal{A}(U, \mathbb{C})$	der Raum der analytischen Funktionen mit dem offenen Definitionsbereich $U \subset \mathbb{C}$ und Bild in $\mathbb{C}$ .....	5
$B_r(z_0)$	die offene Kugel um $z_0$ mit Radius $r > 0$ innerhalb der komplexen Zahlenebene .....	5
$\overline{\mathbb{C}}$	die erweiterte komplexe Zahlenebene .....	35
$\overline{D}$	der Abschluss einer Menge $D \subset \mathbb{C}$ .....	11
$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null .....	6
$f _U$	die Einschränkung der Funktion $f$ auf eine Teilmenge $U$ ihres Definitionsbereiches .....	6
$\gamma_\nu$	die Verkettung $\nu \circ \gamma$ .....	36
$\mathcal{O}$	das Landausymbol für asymptotische obere Schranken .....	52
$\text{ran}(f)$	das Bild einer Funktion $f$ .....	12
$\ \cdot\ _{\mathbb{C}^n}$	eine Norm im Vektorraum $\mathbb{C}^n$ .....	10
$\ \cdot\ _{\mathbb{C}^{n \times n}}$	die bezüglich $\ \cdot\ _{\mathbb{C}^n}$ induzierte Matrixnorm .....	10



## Literaturverzeichnis

- [1] S. ALBEVERIO, S. KUZHEL, *One-dimensional Schrödinger operators with  $P$ -symmetric zero-range potentials*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 4975–4988, 2005.
- [2] S. ALBEVERIO, A. K. MOTOVILOV, A. A. SHKALIKOV, *Bounds on variation of spectral subspaces under  $J$ -self-adjoint perturbations*, Integral Equations Oper. Theory **64**, 455–486, 2009.
- [3] S. ALBEVERIO, U. GÜNTHER, S. KUZHEL,  *$J$ -self-adjoint operators with  $C$ -symmetries: extension theory approach*, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 105205, 2009.
- [4] T. YA. AZIZOV, C. TRUNK, *On domains of  $\mathcal{PT}$  symmetric operators related to  $-y''(x) + (-1)^n x^{2n} y(x)$* , J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 175303, 2010.
- [5] T. YA. AZIZOV, C. TRUNK,  *$\mathcal{PT}$  symmetric, Hermitian and  $\mathcal{P}$ -self-adjoint operators related to potentials in  $\mathcal{PT}$  quantum mechanics*, J. Math. Phys. **53**, 012109, 2012.
- [6] T. YA. AZIZOV, C. TRUNK, *On a class of Sturm-Liouville operators which are connected to  $\mathcal{PT}$  symmetric problems*, Proc. Appl. Math. Mech. **14** (1), 991–992, 2014.
- [7] C. M. BENDER, S. BOETTCHER, *Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having  $\mathcal{PT}$  Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243–5246, 1998.
- [8] C. M. BENDER, *Introduction to  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quantum Theory*, Contemp. Phys. **46**, 277–292, 2005.
- [9] C. A. BERENSTEIN, R. GAY, *Complex Variables: An Introduction*, Springer, 1991.
- [10] L. N. BRILLOUIN, *La mécanique ondulatoire de Schrödinger: une méthode générale de résolution par approximations successives*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **183**, 24–26, 1926.
- [11] E. CALICETI, S. GRAFFI, J. SJÖSTRAND, *Spectra of  $\mathcal{PT}$ -symmetric operators and perturbation theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 185–193, 2005.
- [12] E. CALICETI, F. CANNATA, S. GRAFFI, *Perturbation theory of  $\mathcal{PT}$  symmetric Hamiltonians*, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 10019–10027, 2006.
- [13] E. CALICETI, F. CANNATA, S. GRAFFI, *An analytic family of  $\mathcal{PT}$ -symmetric Hamiltonians with real eigenvalues*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 244008, 2008.

- [14] F. CARLINI, *Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero*, Milano, 1817.
- [15] R. BUSAM, E. FREITAG, *Funktionentheorie 1*, Springer, 2006.
- [16] J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, 2. ed., Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, 1978.
- [17] P. DOREY, C. DUNNING, R. TATEO, *Spectral equivalences, Bethe Ansatz equations, and reality properties in  $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 5679–5704, 2001.
- [18] M. S. P. EASTHAM, *The Asymptotic of Linear Differential Systems*, London Mathematical Society Monographs New Series **4**, Oxford University Press, 1989.
- [19] E. FREITAG, *Funktionentheorie 2*, Springer, 2009.
- [20] R. GANS, *Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium*, Ann. Physik **352** (14), 709–736, 1915.
- [21] I. GIORDANELLI, G. M. GRAF, *The real spectrum of the imaginary cubic oscillator: An expository proof*, Ann. Henri Poincaré **16**, 99–112, 2015.
- [22] G. GREEN, *On the motion of waves in a variable canal of small depth and width*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **6**, 457–462, 1837.
- [23] D. J. GRIFFITHS, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2. ed., Prentice Hall, 2004.
- [24] B. C. HALL, *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer, 2013.
- [25] W. K. HEISENBERG, *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen*, Diss. Institut für theoretische Physik, München, 1924.
- [26] E. HILLE, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Dover Publications, 1997.
- [27] YU. ILYASHENKO, C. YAKOVENKO, *Lectures on Analytic Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **86**, Amer. Math. Soc., 2008.
- [28] K. JÄHNICH, *Funktionentheorie: Eine Einführung*, Springer, 2004.
- [29] H. JEFFREYS, *On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order*, Proc. London Math. Soc. **23**, 428–436, 1924.
- [30] H. A. KRAMERS, *Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung*, Zeitschrift für Physik **38** (10–11), 518–529, Springer, 1926.

- [31] S. KUZHEL, C. TRUNK, *On a class of  $J$ -self-adjoint operators with empty resolvent set*, J. Math. Anal. Appl. **379**, 272–289, 2011.
- [32] H. LANGER, C. TRETTER, *A Krein space approach to  $\mathcal{PT}$ -symmetry*, Czech. J. Phys. **54**, 1113–1120, 2004.
- [33] J. LIOUVILLE, *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable*, J. Math. Pures Appl. **2**, 16–35, 1837.
- [34] J. A. M. MCHUGH, *An Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points*, Arch. History Exact Sci. **7**, 277–324, 1971.
- [35] N. MOISEYEV, *Non-Hermitian quantum mechanics*, Cambridge University Press, 2011.
- [36] A. MOSTAFAZADEH, *Pseudo-Hermitian description of  $\mathcal{PT}$ -symmetric systems defined on a complex contour*, J. Phys. A: Math Gen. **38**, 3213–3234, 2005.
- [37] A. MOSTAFAZADEH, *Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics*, Int. J. geom. methods M. **7** (7), 1191–1306, 2010.
- [38] F. W. J. OLVER, *Error Bounds for Liouville-Green (or WKB) Approximation*, Math. Proc. Cambridge **57**, 790–810, 1961.
- [39] F. W. J. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, A K Peter, 1974.
- [40] E. R. PIKE, *On the related-equation method of asymptotic approximation (W. K. B. or A-A method), I. A proposed new existence theorem*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **17**, 105–124, 1964.
- [41] LORD RAYLEIGH, *On the Propagation of Waves through a Stratified Medium, with Special Reference to the Question of Reflection*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **86** (586), 207–226, 1912.
- [42] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3. ed., McGraw-Hill Education, 1987.
- [43] F. SCHWABL, *Quantenmechanik*, 7. Auflage, Springer, 2007.
- [44] K. C. SHIN, *On the eigenproblems of  $\mathcal{PT}$ -symmetric oscillators*, J. Math. Phys. **42** (6), 2513–2530, 2001.
- [45] K. C. SHIN, *On the Reality of the Eigenvalues for a Class of  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Oscillators*, Commun. Math. Phys. **229**, 543–564, 2002.
- [46] Y. SIBUYA, *Global Theory of a Second Order Linear Ordinary Differential Equation with a Polynomial Coefficient*, North-Holland Publishing Company, 1975.

- [47] J. G. TAYLOR, *Improved Error Bounds for Liouville-Green (or WKB) Approximation*, J. Math. Anal. Appl. **85**, 79–89, 1982.
- [48] G. TESCHL, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., 2012.
- [49] R. WALTER, *Einführung in die Analysis 1*, Walter de Gruyter, 2007.
- [50] G. WENTZEL, *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*, Zeitschrift für Physik **38** (6–7), 518–529, Springer, 1926.
- [51] A. ZETTL, *Sturm-Liouville Theory*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Band 121, American Mathematical Society, 2005.